

ANNALEN DER PHYSIK

6. FOLGE * BAND 4, HEFT 6 * 1949

*Prozesse zwischen leichten Teilchen nach der Diracschen Theorie**

Von B. Kockel

(Mit 1 Abbildung)

Inhaltsübersicht

Solche Prozesse zwischen Elektronen und Positronen werden untersucht, in denen die Zustandsänderungen der Elektronen ohne Beteiligung schwerer Teilchen unter Emission oder Absorption von Lichtquanten geschehen. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten der einfachsten Prozesse dieser Art (Compton-effekt, Erzeugung oder Zerstrahlung eines Elektron-Positron-Paars) sind in Abschnitt 5 noch einmal in einheitlicher Rechnung bestimmt. Abschnitt 6 gibt die Wahrscheinlichkeit der Zerstrahlung eines Paares unter Bildung von drei Lichtquanten. Dabei ergibt sich diese „Dreifachzerstrahlung“, bei hoher Energie des Paares mit derselben oder größerer Wahrscheinlichkeit als die „Zweifachzerstrahlung“, was natürlich nur bedeutet, daß bei solchen Energien die Einteilung der Zerstrahlungsprozesse nach der Zahl der erzeugten Lichtquanten unbrauchbar ist. Abschnitt 3 zeigt, daß keine Prozesse möglich sind, in denen bei Beteiligung beliebig vieler Lichtquanten mehr als ein Elektron seinen Zustand wechselt, z. B. ist also die simultane Bildung zweier Paare aus Lichtquanten unmöglich. Die Tragweite dieses Ergebnisses und seine Abhängigkeit von den benutzten Eigenfunktionen der Elektronen und dem störungstheoretischen Ansatz werden auf Seite 281 und 282 diskutiert.

1. Einleitung

In der Diracschen relativistischen Theorie des Elektrons findet man wie in der nichtrelativistischen Quantenmechanik, daß den Elektronen bestimmte durch ihre Eigenfunktionen gekennzeichnete Zustände zur Verfügung stehen. Durch eine geeignete Periodizitätsbedingung kann man immer erreichen, daß die Zustände eine diskrete Mannigfaltigkeit bilden. Nach dem Pauli-Prinzip kann dann jeder dieser Zustände höchstens einmal besetzt sein. Die Zustände negativen Energievorzeichens sind nach Dirac fast alle besetzt; die volle Besetzung aller Zustände negativer Energie soll keine physikalische Bedeutung haben; unbesetzte Zustände negativer Energie bedeuten Positronen. Jedes Elektron kann unter dem Einfluß einer Störung in einen anderen vorher nicht besetzten Zustand übergehen. Nach der Diracschen Deutung haben solche Übergänge ja nach dem Energievorzeichen im Anfangs- und Endzustand des Übergangs eine andere physikalische Bedeutung: ++ Elektronensprung, -- Positronensprung, -+ Erzeugung eines Elektron-Positron-Paars, +- Vernichtung eines solchen Paares.

*) Eingereicht zur Erlangung der *venia legendi* in der Philosophischen Fakultät der Universität Leipzig.

Die den Übergang auslösende Störung kann verschiedener Art sein. In dieser Arbeit sollen solche Prozesse untersucht werden, in denen der Elektronenübergang durch ein Strahlungsfeld, also durch Absorption oder Emission von Lichtquanten geschieht. An solchen Prozessen können schwere Teilchen beteiligt sein, sei es in der Form, daß alle oder ein Teil der beteiligten Elektronenzustände an einen Kern gebundene Zustände sind (Beispiele: Absorption, Emission, photoelektrischer Effekt), sei es, daß die Mitwirkung eines Kernes notwendig ist für den Ablauf des Prozesses (Beispiel: Bremsstrahlung). Weiter gibt es Prozesse, die ohne jede Beteiligung eines schweren Teilchens ablaufen; Prozesse dieser Art sollen in dieser Arbeit näher untersucht werden. Als einfachste derartige Prozesse ergeben sich die vier Prozesse der folgenden Aufstellung, alle dadurch gekennzeichnet, daß ein Elektron unter dem Einfluß zweier Lichtquanten in einen anderen Zustand gelangt.

Elektron und Lichtquant \rightarrow Elektron und Lichtquant (Comptoneffekt)

Positron und Lichtquant \rightarrow Positron und Lichtquant (Comptoneffekt am Positron).

Zwei Lichtquanten \rightarrow Elektron und Positron (Paarerzeugung, Materialisation von Lichtquanten).

Elektron und Positron \rightarrow zwei Lichtquanten (Paarvernichtung, Zerstrahlung eines Elektron-Positron-Paars).

Die zunächst auch denkbaren noch einfacheren Prozesse, bei denen der Elektronenübergang unter Beteiligung nur eines Lichtquants geschieht — das wären Prozesse, die aus der obigen Aufstellung hervorgehen, wenn man ein Lichtquant streicht — treten nicht auf, weil sie nur unter Verstoß gegen Impuls- oder Energiesatz möglich wären¹⁾.

2. Prozesse höherer Ordnung

Kompliziertere als diese einfachsten Prozesse — der Einfachheit halber sämtlich als „Prozesse höherer Ordnung“ bezeichnet — sind in zweierlei Weise denkbar. Zunächst können nicht ein, sondern zwei oder mehr Elektronen unter Absorption und Emission von Lichtquanten in einen anderen Zustand übergehen. Das wären also Prozesse, bei denen Anfangs- und Endzustand zusammen mehr als zwei materielle Teilchen enthalten. Z. B. gehört hierzu die Erzeugung von zwei oder mehr Elektron-Positron-Paaren in einem Strahlungsfeld. Weiter können die Prozesse der obigen Aufstellung unter Beteiligung von mehr als zwei Lichtquanten auftreten. Ein Beispiel ist der Comptoneffekt unter Bildung von zwei oder mehr Streuquanten. Die Prozesse heißen dann Comptoneffekt, Paarerzeugung oder Paarvernichtung „in höherer Ordnung“²⁾. Schließlich können beide Erweiterungen der einfachsten Prozesse zugleich auftreten³⁾.

¹⁾ Im Feld eines Kernes treten sie auf, weil der Kern überschüssigen Impuls aufnehmen kann.

²⁾ Hier hat die Bezeichnung „höhere Ordnung“ einen wohldefinierten Sinn, denn die Diracsche Störungstheorie — siehe die Zitate bei (1) — muß bei Prozessen, in denen n Lichtquanten auftreten, in n -ter Ordnung angewendet werden, und die Wahrscheinlichkeit dieser Prozesse und die zugehörigen Wirkungsquerschnitte werden proportional e^{2n} , wo e die Elektronenladung ist.

³⁾ Die obige Aufstellung und die besprochenen Erweiterungen umfassen noch nicht alle unter Emission und Absorption von Lichtquanten ablaufenden Prozesse. Beispiel: Streuung von Licht an Licht, wo im Anfangs- und Endzustand gar keine materiellen Teilchen vorhanden sind. H. Euler u. B. Kockel, Naturwiss. 23, 246 (1935); H. Euler, Ann. Physik (5) 26, 398 (1936).

Solche Prozesse höherer Ordnung können in der Form ablaufen, daß in einem unterhalb der Erkennbarkeit kleinen zeitlichen und räumlichen Abstand zwei einfachere Prozesse auftreten. Z. B. könnten so vier Lichtquanten zwei Elektron-Positron-Paare bilden, indem jeweils zwei Quanten ein Paar bilden. Gemäß der Zusammensetzung aus zwei (oder mehr) einfachen Prozessen müssen schon für diese selbst Impuls- und Energiesatz erfüllt sein. Bei dem als Beispiel genannten Prozeß, dessen Gesamtbilanz durch: 4 Lichtquanten \rightarrow 2 Paare gekennzeichnet ist, würden also zwei Impulsgleichungen und zwei Energiegleichungen gelten:

$$g_1 + g_2 = p_{-1} + p_{+1} \quad c g_1 + c g_2 = c \sqrt{m^2 c^2 + p_{-1}^2} + c \sqrt{m^2 c^2 + p_{+1}^2}$$

$$g_3 + g_4 = p_{-2} + p_{+2} \quad c g_3 + c g_4 = c \sqrt{m^2 c^2 + p_{-2}^2} + c \sqrt{m^2 c^2 + p_{+2}^2}$$

(g Lichtquanten-, p_{-} Elektronen-, p_{+} Positronenimpulse). Darüber hinaus können aber auch Prozesse auftreten, bei denen Impuls- und Energiesatz nur für den gesamten Prozeß erfüllt sind: „Eigentliche Prozesse höherer Ordnung“. Bei der Erzeugung zweier Paare aus vier Lichtquanten wären also nur die beiden Gleichungen

$$g_1 + g_2 + g_3 + g_4 = p_{-1} + p_{-2} + p_{+1} + p_{+2}$$

$$c \{g_1 + g_2 + g_3 + g_4\}$$

$$= c \{ \sqrt{m^2 c^2 + p_{-1}^2} + \sqrt{m^2 c^2 + p_{-2}^2} + \sqrt{m^2 c^2 + p_{+1}^2} + \sqrt{m^2 c^2 + p_{+2}^2} \}$$

erfüllt, nicht aber entsprechende Gleichungen, in denen nur einige der acht beteiligten Teilchen auftreten.

In den folgenden Abschnitten wird für die eigentlichen Prozesse höherer Ordnung gezeigt:

Dritter Abschnitt: Im Rahmen der benutzten Ansätze für die Eigenfunktionen der Elektronen und ihre Wechselwirkung mit elektromagnetischer Strahlung findet man: Es gibt keinen Prozeß höherer Ordnung, in dem unter Absorption und Emission von Lichtquanten mehr als ein Elektron seinen Zustand wechselt. Es gibt also z. B. keine Erzeugung von mehr als einem Paar, keine Zerstrahlung von mehr als einem Paar unter Absorption oder Emission von beliebig vielen Lichtquanten. Ebenso gibt es nicht den entsprechenden Comptonprozeß höherer Ordnung, also keinen Prozeß, bei dem n (≥ 2) Elektronen + absorbierte Lichtquanten in n andere Elektronen + emittierte Lichtquanten übergehen.

Man muß sich bei diesem, Prozesse der beschriebenen Art absolut ausschließen. Das Resultat allerdings darüber im klaren sein, daß eine exaktere Theorie zu Einschränkungen dieses Ergebnisses führen könnte. Die Elektronengesamtheit ist in der später folgenden Rechnung unter Überlagern der individuellen Eigenfunktionen aller Elektronen beschrieben worden, statt, wie es richtig wäre, durch eine Eigenfunktion in den unendlich vielen Variablen aller Elektronen. Damit ist z. B. die gegenseitige Beeinflussung der Elektronen — gleichen oder ungleichen Spins — nicht berücksichtigt. Darüber hinaus ist die Wechselwirkung der Elektronen mit den Lichtquanten nicht so beschrieben worden, daß die Eigenfunktionen der Elektronen im Feld der Lichtquanten exakt berechnet wurden. Die Wechselwirkung ist vielmehr durch ein Störungsverfahren genähert bestimmt worden. Es kann also sein, daß eine exaktere Theorie doch eine nicht verschwindende Wahr-

scheinlichkeit für den gleichzeitigen Niveauwechsel von zwei oder mehr Elektronen ergibt. Da aber die in der Rechnung verwendeten genäherten Verfahren in vielen Fällen zu gut mit der Erfahrung übereinstimmenden Resultaten führen (z. B. Comptoneffekt, Abbremsung von Elektronen in Materie bei Energien bis etwa 10^6 eV⁴⁾) und deshalb anzunehmen ist, daß eine exaktere Theorie nur zu geringfügigen Modifikationen der bisherigen Resultate wenigstens im Bereich nicht zu hoher Energie führen wird, können wir erwarten, daß von unserem Ergebnis folgendes richtig bleiben wird: Der gleichzeitige Niveauwechsel von zwei oder mehr Elektronen unter dem Einfluß von Lichtquanten ist wenigstens für nicht zu hohe Energie wesentlich weniger wahrscheinlich, als nach der Anzahl der beteiligten Lichtquanten zu erwarten wäre. In Formeln: Für die zugehörigen Wirkungsquerschnitte ist bei n beteiligten Lichtquanten

$$\Phi \approx \left(\frac{e^2}{m c^2}\right)^2 \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^{n-2} \quad \text{mal}$$

einer dimensionslosen Kombination von $m c$ und Impulsen, die von der Größenordnung 1 ist, wenn die Impulse die Größenordnung $m c$ haben, zu erwarten. Statt dessen wird $\Phi \ll$ eine solche Größe.

Vierter Abschnitt: Dagegen gibt es alle solche Prozesse höherer Ordnung, in denen nur ein Elektron seinen Zustand wechselt unter Beteiligung von mehr als der Mindestzahl von zwei Lichtquanten, die bei den entsprechenden einfachen Prozessen auftreten. Folgende Prozesse sind also möglich: Comptoneffekt, ein Elektron + mindestens ein absorbiertes Lichtquant gehen über in das gestreute Elektron + mindestens ein emittiertes Lichtquant; Paarerzeugung, mindestens zwei Lichtquanten bilden ein Elektron-Positron-Paar und $n \geq 0$ emittierte Lichtquanten; Zerstrahlung, ein Paar geht unter gleichzeitiger Absorption von $n \geq 0$ Lichtquanten über in mindestens zwei Lichtquanten. Dabei sind in dieser Aufstellung die einfachsten Prozesse mit enthalten; man erhält sie, wenn nur die jeweils genannte Mindestzahl von Lichtquanten (0 oder 1 oder 2) beteiligt ist.

Fünfter Abschnitt: In diesem Abschnitt werden Wahrscheinlichkeiten und Wirkungsquerschnitte für die — schon in der Einleitung genannten — einfachsten Prozesse noch einmal in einheitlicher Rechnung zugleich abgeleitet.

Sechster Abschnitt: Die Wahrscheinlichkeit eines der möglichen Prozesse höherer Ordnung, die Zerstrahlung eines Paares unter Bildung von drei Lichtquanten wird berechnet und mit der des entsprechenden einfachen Prozesses verglichen. Dabei ergibt sich, daß diese „Dreifachzerstrahlung“ erst für sehr hohe Energie ebenso wahrscheinlich wird wie die „Zweifachzerstrahlung“, so daß im experimentell erreichbaren Energiebereich sowohl die Lebenszeit langsamer Positronen wie der Anteil der Zerstrahlung an der Abbremsung schneller durch Materie fliegender Positronen weiter durch die Zweifachzerstrahlung bestimmt bleiben. In dem Energiebereich, in dem die Wahrscheinlichkeit der Dreifachzerstrahlung ebenso groß wie die der Zweifachzerstrahlung wird, ist daselbe von der Vierfach-, Fünffachzerstrahlung usw. zu erwarten; das heißt soviel wie: In diesem Energiebereich sind das ganze Verfahren, die Prozesse nach der Anzahl der beteiligten Lichtquanten einzuteilen, und die dieser Einteilung angepaßten, in der Rechnung verwendeten störungstheoretischen Ansätze samt den abgeleiteten Resultaten als illusorisch anzusehen.

⁴⁾ Vgl. W. Heitler, *The Quantum Theory of Radiation*, 1936.

3. Prozesse mit mehr als zwei materiellen Teilchen

Die Übergangswahrscheinlichkeit für Prozesse zwischen Elektronen, Positronen und Lichtquanten ist⁵⁾

$$W = \frac{2n}{\hbar \Delta E_n} \left| \sum \frac{V_{12} V_{23} V_{34} \dots V_{n-1,n}}{(E_1 - E_2)(E_1 - E_3) \dots (E_1 - E_{n-1})} \right|^2 \quad (1)$$

mit

$$V_{k,k+1} = e \sqrt{\frac{c \hbar}{g V}} \{a_{p' \sigma' \lambda'} (\alpha e) a_{p' \pm g, \sigma'', \lambda''}\}. \quad (2)$$

Dabei bedeuten die Indizes 1, 2, 3 ... n Gesamtzustände, also eine bestimmte Konfiguration von Lichtquanten und besetzten Elektronenzuständen. Die möglichen Elektronenzustände sind auf das Volumen V normierte ebene Wellen $\frac{1}{\sqrt{V}} a_{p\sigma\lambda}$, also gekennzeichnet durch die drei Angaben p (Impuls), σ (Spin), λ (Energievorzeichen) und den zugehörigen Diracschen Vierervektor $a_{p\sigma\lambda}$. Das Matrixelement $V_{k,k+1}$ der Störungsenergie beschreibt einen Übergang vom Zustand k zum Zustand $k+1$, der dadurch geschieht, daß das in k vorhandene Elektron (p', σ', λ') unter Aufnahme des Impulses g (Betrag g) eines absorbierten Lichtquants oder unter Abgabe des Impulses g eines emittierten Lichtquants übergeht in den Zustand ($p' \pm g, \sigma'', \lambda''$). Die Gesamtzustände k und $k+1$ unterscheiden sich also dadurch voneinander, daß ein Lichtquant neu entstanden oder verschwunden ist und ein Elektron unter Einhaltung des Impulssatzes einen Niveauwechsel vorgenommen hat. e ist die Polarisationsrichtung des betreffenden Lichtquants, $\alpha e = \alpha_x e_x + \alpha_y e_y + \alpha_z e_z$, wo die α die Matrizen der Diracgleichung $\frac{\hbar}{c} \psi = (\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z) \psi$ sind.

Die Nenner $E_1 - E_k$ stellen die Summen aller vom Anfangszustand 1 bis zum Zwischenzustand k freigewordenen Energien dar:

$$E_1 - E_k = (E_1 - E_2) + (E_2 - E_3) + (E_3 - E_4) + \dots + (E_{k-1} - E_k)$$

wo

$$E_{j-1} - E_j = c \lambda' \sqrt{m^2 c^2 + p'^2} - c \lambda'' \sqrt{m^2 c^2 + (p' \pm g)^2} \pm c g$$

ist. (Oberes Vorzeichen bei Absorption, unteres Vorzeichen bei Emission). Für den gesamten Prozeß gilt der Energie-Erhaltungssatz $E_1 = E_n$. $\frac{1}{\Delta E_n}$ bedeutet die Dichte der Endzustände auf ihrer Energieskala. Das Summenzeichen Σ in (1) bedeutet „Summe über alle Möglichkeiten, vom Zustand 1 unter Emission bzw. Absorption aller beteiligten Lichtquanten zum Zustand n zu kommen“. Wie man Anzahl und Art dieser Möglichkeiten bestimmt, ist mehrfach in der Literatur behandelt worden⁶⁾.

Anfangs- und Endzustand mögen sich nun dadurch voneinander unterscheiden, daß zwei Elektronen in einen anderen Zustand gelangt sind. Das eine Elektron kann seinen Endzustand etwa über folgende Zwischenzustände erreicht haben.

$$p_0, \lambda_0, \sigma_0 \rightarrow p_1, \lambda_1, \sigma_1 \rightarrow p_2, \lambda_2, \sigma_2 \rightarrow \dots \rightarrow p_n, \lambda_n, \sigma_n. \quad (3)$$

⁵⁾ Über die Herleitung dieser aus dem Ansatz ebener Wellen für die Eigenfunktionen der materiellen Teilchen, der Quantisierung des Strahlungsfeldes und der Diracschen Störungstheorie hervorgehenden Formel vgl. z. B. W. Heitler, l. c. — H. Euler, l. c. — B. Kockel, Z. Physik **107**, 153 (1937).

⁶⁾ Vgl. die weiter unten zitierten Arbeiten und für einen komplizierteren Fall: H. Euler, l. c.

Das andere möge folgende Zustandswechsel durchgeführt haben

$$p'_0, \lambda'_0, \sigma'_0 \rightarrow p'_1, \lambda'_1, \sigma'_1 \rightarrow p'_2, \lambda'_2, \sigma'_2 \rightarrow \dots \rightarrow p'_m, \lambda'_m, \sigma'_m. \quad (4)$$

(m kann $\geq n$ sein). Bei einer Erzeugung zweier Paare wären $\lambda_0 = \lambda'_0 = -1$, $\lambda_n = \lambda'_m = +1$, bei einer Zerstrahlung zweier Paare wäre es umgekehrt. Suchen wir alle diejenigen Übergangsmöglichkeiten auf, die über die in (3) und (4) ausgewählten Zwischenzustände führen, so finden wir jedenfalls, daß erst die Übergangsreihe (3) vollständig und danach die Reihe (4) ablaufen kann, weiter, daß zuerst ein Teil der Reihe (3), dann ein Teil der Reihe (4), dann der Rest der Reihe (3), dann der Rest der Reihe (4) ablaufen kann usw., kurz, die Reihen (3) und (4) können beliebig ineinander geschachtelt werden, z. B. in leicht verständlicher Schreibweise

$$(0'1') (01) (12) (23) (34) (1'2') (2'3') (45) (3'4') (56) (67) \dots \dots (m-1', m') (n-2, n-1) (n-1, n) \quad (5)$$

Für alle auf diese Weise erfaßten Übergangsmöglichkeiten ist das Produkt der (kommutativen) Größen $V_{k,k+1}$ in (1) gleich groß. Die Diskussion der Σ über alle Übergangsmöglichkeiten reduziert sich also auf die Erörterung der Summe über die Energiedifferenzprodukte im Nenner von (1). Wir bezeichnen die vom Anfangszustand bis zum k -ten Zustand freiwerdende Energie (einschließlich der Lichtquantenenergie) für die Reihe (3) mit F_k , für die Reihe (4) mit G_k , z. B. also

$$F_1 = c \lambda_0 \sqrt{m^2 c^2 + p_0^2} - c \lambda_1 \sqrt{m^2 c^2 + p_1^2} \pm c |p_1 - p_0|$$

$$G_2 = c \lambda'_0 \sqrt{m^2 c^2 + p_0'^2} - c \lambda'_2 \sqrt{m^2 c^2 + p_2'^2} \pm c |p'_1 - p'_0| \pm c |p'_2 - p'_1|.$$

Auf Grund des Energiesatzes ist $F_n + G_m = 0$. Jeder der Nenner in (1) läßt sich in der Form schreiben

$$\prod_{v=1}^{k_1 \geq 0} F_v \prod_{v=k_1}^{k_2 \geq k_1} (F_v + G_1) \prod_{v=k_2}^{k_3 \geq k_2} (F_v + G_2) \dots \prod_{v=k_{m-1}}^{k_m \geq k_{m-1}} (F_v + G_{m-1}) \prod_{v=k_m}^{n-1} (F_v + G_m). \quad (6)$$

Dabei sind $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq k_3 \dots k_m \leq n$ Zahlen zwischen 0 und n . Das erste und das letzte Produkt sind durch 1 zu ersetzen, wenn der obere Index kleiner als der untere ist. Jede Zahlenfolge $k_1 \dots k_m$ stellt eine Möglichkeit der Ineinanderschachtelung der Übergangsreihen (3) und (4) dar; z. B. bedeutet $k_2 = k_3 = \dots k_m = 0$, daß erst die Reihe (4) vollständig, dann die Reihe (3) abläuft, umgekehrt bedeutet $k_1 = k_2 = \dots k_m = n$, daß erst die Reihe (3) vollständig, dann die Reihe (4) abläuft. Die Zahl der Möglichkeiten ist gleich der Zahl der Kombinationen von n Elementen zur m -ten Klasse mit Wiederholung $= \binom{n+m}{m}$. Für die Berechnung von (1) ist der Ausdruck

$$A = \sum_{\text{alle } k\text{-Folgen}} \{(6)\}^{-1} = \sum_{k_1=0}^{k_2} \sum_{k_2=0}^{k_3} \dots \sum_{k_m=0}^n \{(6)\}^{-1} \quad (7)$$

auszuwerten. Es ist

$$\{(6)\}^{-1} = \frac{B}{C}$$

mit

$$C = \prod_{1 \text{ bis } n} F_v \prod_{1 \text{ bis } m} G_\mu \prod_{\substack{v=1 \text{ bis } n \\ \mu=1 \text{ bis } m}}' (F_v + G_\mu)^7$$

⁷⁾ Π' heißt außer dem Fall, daß zugleich $v = n$, $\mu = m$ ist, also außer $F_n + G_m$.

$$B = \prod_{k_1+1}^n F_v \prod_0^{k_1-1} (F_v + G_1) \prod_{k_2+1}^n (F_v + G_1) \prod_0^{k_2+1} (F_v + G_2) \dots$$

$$\prod_{k_m+1}^n (F_v + G_{m-1}) \prod_0^{k_m-1} (F_v + G_m),$$

also

$$A = \frac{1}{C} \sum_{k_1=0}^{k_2} \sum_{k_2=0}^{k_3} \dots \sum_{k_m=0}^n B.$$

Wir werten zuerst die Summen über k_1 aus (unter Weglassen der von k_1 nicht abhängigen Faktoren).

$$\sum_{k_1=0}^{k_2} \prod_{k_2+1}^n F_v \prod_0^{k_1-1} (F_v + G_1) = \prod_{k_2+1}^n F_v \sum_{k_1=0}^{k_2} \prod_{k_2+1}^{k_1} F_v \prod_0^{k_1-1} (F_v + G_1)$$

$$= \prod_{k_2+1}^n F_v \prod_1^{k_2} (F_v + G_1).$$

Entsprechend erhalten wir für die Summe über k_2

$$\sum_{k_2=0}^{k_3} \prod_{k_2+1}^n F_v \prod_1^{k_2} (F_v + G_1) \prod_{k_2+1}^n (F_v + G_1) \prod_0^{k_2-1} (F_v + G_2)$$

$$= \prod_{k_2+1}^n F_v \prod_1^n (F_v + G_1) \sum_{k_2=0}^{k_3} \prod_{k_2+1}^{k_3} F_v \prod_0^{k_2-1} (F_v + G_2)$$

$$= \prod_1^n (F_v + G_1) \prod_1^{k_3} (F_v + G_2) \prod_{k_2+1}^n F_v.$$

Im weiteren Fortgang der Rechnung entstehen die Produkte $\prod_1^n (F_v + G_1)$,

$\prod_1^n (F_v + G_2)$ usw. Der letzte Schritt der Rechnung heißt

$$A = \frac{1}{C} \prod_1^n (F_v + G_1) \prod_1^n (F_v + G_2) \dots$$

$$\prod_1^n (F_v + G_{m-1}) \sum_{k_m=0}^n \prod_{k_m+1}^n F_v \prod_0^{k_m-1} (F_v + G_m)$$

$$A = \frac{1}{C} \prod_1^n (F_v + G_1) \prod_1^n (F_v + G_2) \dots \prod_1^n (F_v + G_{m-1}) \prod_1^n (F_v + G_m)$$

oder schließlich

$$A = \frac{\prod_{\substack{v=1 \text{ bis } n \\ \mu=1 \text{ bis } m}} (F_v + G_\mu)}{\prod_{1 \text{ bis } n} F_v \prod_{1 \text{ bis } m} G_\mu \prod_{\substack{v=1 \text{ bis } n \\ \mu=1 \text{ bis } m}} (F_v + G_\mu)} = \frac{F_n + G_m}{\prod_{1 \text{ bis } n} F_v \prod_{1 \text{ bis } m} G_\mu} = 0$$

nach dem Energiesatz. Für jede Kombination zweier solcher Übergangsreihen (3) und (4) ist also der Beitrag zur Summe in der Formel für die Übergangswahrscheinlichkeit (1) gleich Null. Da die Gesamtheit aller Übergangsmöglichkeiten aus solchen Kombinationen zusammengesetzt ist, ist $W=0$, wenn Anfangs- und Endzustand sich dadurch voneinander unterscheiden, daß zwei Elektronen in einen anderen Zustand gelangt und beliebig viele Lichtquanten emittiert oder absorbiert worden sind. Ein solcher Prozeß tritt also nicht ein, auch wenn er nach Impuls- und Energiesatz möglich ist.

Die Rechnung der letzten beiden Seiten läßt sich erweitern für den Fall, daß $N > 2$ Elektronen in einen anderen Zustand gelangen. Man muß dann N Übergangsreihen (3) kombinieren, d. h. nach Art von (5) ineinander verschachteln. Für ihren Beitrag zur Übergangswahrscheinlichkeit hat man einen (7) entsprechenden Ausdruck auszuwerten, für den man

$$A = \frac{F_n + G_m + H_k + \dots}{\prod F_r \prod G_\mu \prod H_\kappa \dots} = 0$$

erhält, weil der Zähler die gesamte freiwerdende Energie darstellt, die nach dem Energiesatz gleich Null sein muß. Also gilt folgender Satz allgemein: Die Übergangswahrscheinlichkeit ist gleich Null für solche Prozesse höherer Ordnung zwischen Elektronen und Lichtquanten, bei denen sich Anfangs- und Endzustand dadurch voneinander unterscheiden, daß zwei oder mehr Elektronen in einen anderen Zustand gelangt sind^{*)}).

4. Comptoneffekt, Paarerzeugung und Zerstrahlung bei Beteiligung von beliebig vielen Lichtquanten

Der vorige Abschnitt sagt nichts aus über Prozesse, in denen nur ein Elektron in einen anderen Zustand gelangt. Solche Prozesse bleiben also möglich. Nach dem Energievorzeichen des einen Elektrons, das bei diesen Prozessen von einem Anfangsniveau p_0, σ_0, λ_0 nach dem Endniveau p_n, σ_n, λ_n gelangt, hat man

$$\begin{array}{lll} \lambda_0 = +1 & \lambda_n = +1 & \text{Comptoneffekt am Elektron,} \\ \lambda_0 = -1 & \lambda_n = -1 & \text{Comptoneffekt am Positron,} \\ \lambda_0 = +1 & \lambda_n = -1 & \text{Zerstrahlung,} \\ \lambda_0 = -1 & \lambda_n = +1 & \text{Paarerzeugung.} \end{array}$$

Impuls- und Energiesatz verlangen, wenn g_a, g_e die Impulse absorbiert und emittierter Lichtquanten bedeuten

$$p_n = p_0 + \sum g_a - \sum g_e \quad \lambda_n \sqrt{m^2 c^2 + p_n^2} = \lambda_0 \sqrt{m^2 c^2 + p_0^2} + \sum g_a - \sum g_e.$$

Sind λ_0 und λ_n gleich (Comptoneffekt), so kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit in ein Bezugssystem übergehen, in dem $p'_n = -p'_0$ ist. Das neue System muß dabei gegen das ursprüngliche Bezugssystem die gleichförmige Geschwindigkeit $c \frac{p_0 + p_n}{\sqrt{m^2 c^2 + p_0^2} + \sqrt{m^2 c^2 + p_n^2}}$ haben. Im neuen System gilt dann

$$2 p'_0 = \sum g'_e - \sum g'_a \quad \sum g'_e = \sum g'_a.$$

Das ist sicher möglich, wenn beide Summen mindestens ein Lichtquant enthalten, also muß mindestens ein Lichtquant absorbiert und mindestens eins emittiert werden.

Sind λ_0 und λ_n ungleich, so kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit in ein Bezugssystem übergehen, in dem $p'_0 = p'_n$ ist. Das neue System hat dabei gegen das ursprüngliche die Geschwindigkeit $c \frac{p_0 - p_n}{\sqrt{m^2 c^2 + p_0^2} + \sqrt{m^2 c^2 + p_n^2}}$.

^{*)} An diesem Ergebnis ändert sich auch nichts, wenn man, um der fast vollständigen Besetzung der Zustände negativer Energie Rechnung zu tragen, die Jordan-Wigner-schen Vorzeichenfunktionen einführt.

^{*)} Also können z. B. nicht drei Lichtquanten zwei Paare bilden, was nach Energie- und Impulssatz durchaus möglich wäre. B. Kockel, Z. Physik 107, 153 (1937).

Im neuen System gilt

$$\sum g'_a = \sum g'_e \quad (8)$$

$$\sum g'_a - \sum g'_e = (\lambda_n - \lambda_0) \sqrt{m^2 c^2 + p_0^2}. \quad (9)$$

Ist $\lambda_n - \lambda_0 = +2$ (Paarerzeugung), so müssen mindestens zwei absorbierte Lichtquanten vorhanden sein; denn wenn nur eins vorhanden wäre, so würden aus (8) und (9) die einander widersprechenden Beziehungen

$$g'_a \leq \sum g'_e \quad g'_a > \sum g'_e$$

folgen. Ist umgekehrt $\lambda_n - \lambda_0 = -2$ (Zerstrahlung), so müssen mindestens zwei Lichtquanten emittiert werden; würde nur eins emittiert, so wäre zugleich

$$g'_e \leq \sum g'_a \quad g'_e > \sum g'_a,$$

was nicht möglich ist. Im folgenden fünften Abschnitt werden die einfachsten möglichen Prozesse, in denen also gerade zwei Lichtquanten beteiligt sind, in einheitlicher Rechnung behandelt. Sie sind von „zweiter Ordnung“, weil infolge des Auftretens zweier Lichtquanten in (1) das Produkt zweier Matricelemente $V_{k, k+1}$ auftritt. Im sechsten Abschnitt werden dann die Prozesse „dritter Ordnung“, also die der Prozesse, an denen drei Lichtquanten beteiligt sind, untersucht.

5. Comptoneffekt, Paarerzeugung und Zerstrahlung in einheitlicher Behandlung

Wir können die Berechnung der Wahrscheinlichkeit dieser Prozesse einheitlich durchführen, wenn wir gemäß dem Schema von S. 286 Energievorzeichen λ der Elektronenzustände und für Impulse und Energien emittierter Lichtquanten eine Vorzeichenumkehr einführen. g und g (eine dann negative Größe!!) bedeuten für ein emittiertes Lichtquant, daß es den Impuls $-g$ und die Energie $-cg$ besitzt. Danach ergibt sich folgendes Schema für alle diese einfachen Prozesse.

Anfangszustand des Elektrons:	p_0, λ_0, σ_0	Energie = $\lambda_0 c \varepsilon_0$
Zwischenzustand entweder:	$p' = p_0 + g', \lambda', \sigma'$	Energie = $\lambda' c \varepsilon'$
oder:	$p'' = p_0 + g'', \lambda'', \sigma''$	Energie = $\lambda'' c \varepsilon''$
Endzustand:	$p = p_0 + g' + g'', \lambda, \sigma$	Energie = $\lambda c \varepsilon$

g', g'' seien die beiden beteiligten Lichtquanten, $\varepsilon', \varepsilon''$ ihre Polarisation. Die Energiedifferenz zwischen Anfangs- und Zwischenzustand ist entweder $c(\lambda_0 \varepsilon_0 + g' - \lambda' \varepsilon')$ oder $c(\lambda_0 \varepsilon_0 + g'' - \lambda'' \varepsilon'')$, wo ε_0 die positive $\sqrt{m^2 c^2 + p_0^2}$ usw. ist. Nach den Gleichungen (1) und (2) erhalten wir

$$W = \frac{2\pi}{\hbar \Delta E} \frac{e^4 c^2 \hbar^2}{V^2 |g' g''|} \left| \sum_{\lambda'} \sum_{\lambda''} \sum_{\sigma'} \frac{[a_{\sigma'}^* (\lambda' \varepsilon') a'] [a_{\sigma'}^* (\lambda'' \vare'') a]}{c(\lambda_0 \varepsilon_0 + g' - \lambda' \varepsilon')} \right|^2. \quad (10)$$

Die Summe in (1) über alle Übergangsmöglichkeiten wird zu der Summe über die beiden Energievorzeichen und Spinzustände der Zwischenzustände und zur Summe über die beiden Fälle „entweder“ und „oder“ der obigen Aufstellung, was ausgedrückt werden kann durch $\sum_{\lambda' \lambda''}$, Summe über die beiden durch Permutation der Lichtquanten entstehenden Ausdrücke. Im allgemeinen interessiert man sich nicht dafür, in welchem Spin- oder Polarisationszustand die zu Anfang und Ende des Prozesses vorhandenen Teilchen sich befinden. Man fragt statt dessen, mit welcher mittleren Wahrscheinlichkeit der untersuchte Prozeß geschieht, wenn in dem Strom der einfallenden Teilchen keine Spin- oder Polarisationsrichtung be-

vorzugt ist. Um diese vereinfachte Frage zu beantworten, hat man in (10) über die Spins oder Polarisierungen der vor dem Prozeß vorhandenen Teilchen zu mitteln und über die Spins und Polarisierungen der nach dem Prozeß vorhandenen Teilchen zu summieren. Das ergibt

$$W = \frac{2\pi}{\hbar \Delta E} \frac{e^4 c^2 \hbar^2}{V^2 |g' g''|} \frac{1}{4} \sum_{\epsilon'} \sum_{\epsilon''} \sum_{\sigma_0} \sum_{\sigma} \left| \sum_{\mathfrak{P}} \sum_{\lambda'} \sum_{\sigma'} \frac{[a_0^* (a \epsilon') a'] [a'^* (\alpha \epsilon'') a]}{c (\lambda_0 \epsilon_0 + g' - \lambda' \epsilon')} \right|^2. \quad (11)$$

Sie Dummation über die $\sigma', \lambda', \sigma'', \lambda''$ kann man in bekannter Weise durchführen¹⁰⁾ unter Benutzung der Operatoren $\hbar = \alpha p + \beta m c$ usw. Man erhält

$$W = \frac{\pi}{8 \Delta E} \frac{e^4 \hbar^2 \hbar}{V^2 |g' g''|} \sum_{\epsilon'} \sum_{\epsilon''} \sum_{\sigma_0} \sum_{\sigma} \left\{ \sum_{\mathfrak{P}} \frac{a_0^* (a \epsilon') (\lambda_0 \epsilon_0 + g' + \hbar') (\alpha \epsilon'') a}{\lambda_0 \epsilon_0 g' - (p_0 g')} \cdot \sum_{\mathfrak{P}} \frac{a^* (\alpha \epsilon'') (\lambda_0 \epsilon_0 + g' + \hbar') (\alpha \epsilon') a_0}{\lambda_0 \epsilon_0 g' - (p_0 g')} \right\}.$$

Summierung über die Spinzustände σ_0, σ nach dem gleichen Verfahren ergibt

$$W = \frac{\pi}{32 \Delta E} \frac{e^4 \hbar^2 \hbar}{V^2 |g' g''|} \frac{1}{\lambda \lambda_0 \epsilon \epsilon_0} \sum_{\epsilon'} \sum_{\epsilon''} \left\{ \text{Spur} \left\{ \sum_{\mathfrak{P}} \frac{(\alpha \epsilon') (\lambda_0 \epsilon_0 + g' + \hbar') (\alpha \epsilon'')}{\lambda_0 \epsilon_0 g' - (p_0 g')} \cdot (\lambda \epsilon + \hbar) \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \sum_{\mathfrak{P}} \frac{(\alpha \epsilon'') (\lambda_0 \epsilon_0 + g' + \hbar') (\alpha \epsilon')}{\lambda_0 \epsilon_0 g' - (p_0 g')} \cdot (\lambda_0 \epsilon_0 + \hbar_0) \right\} \right\}.$$

Die weitere Rechnung wird weitgehend vereinfacht, wenn man ein Bezugssystem benutzt, in dem $p_0 = 0$ und damit $\epsilon_0 = m c$ ist. Man erhält dann

$$W = \frac{\pi}{32 \Delta E} \frac{e^4 \hbar^2 \hbar}{V^2 |g' g''|} \frac{1}{\lambda \lambda_0 \epsilon m^2 c^2} \sum_{\epsilon'} \sum_{\epsilon''} \left\{ \text{Spur} \left\{ \sum_{\mathfrak{P}} \frac{(\alpha \epsilon') (\lambda_0 m c + g' + \hbar') (\alpha \epsilon'')}{g'} \cdot (\lambda \epsilon + \hbar) \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \sum_{\mathfrak{P}} \frac{(\alpha \epsilon'') (\lambda_0 m c + g' + \hbar') (\alpha \epsilon')}{g'} \cdot (\lambda_0 + \beta) \right\} \right\}.$$

Wegen der beiden zweigliedrigen Summen über die Permutation besteht die Spur aus vier Teilen. Man erhält unter gleichzeitiger Summierung über die Polarisationsrichtungen der Lichtquanten

$$\begin{aligned} \sum_{\epsilon'} \sum_{\epsilon''} \text{Spur} \dots &= 32 \left(m c + \lambda_0 g'' - \lambda_0 \frac{(g' g'')}{g'} + \lambda_0 g' \sin^2 \vartheta \right) \\ &\quad - 16 \sin^2 \vartheta (m c + \lambda_0 g' + \lambda_0 g'') \\ &+ 32 \left(m c + \lambda_0 g' - \lambda_0 \frac{(g' g'')}{g''} + \lambda_0 g'' \sin^2 \vartheta \right) \\ &\quad - 16 \sin^2 \vartheta (m c + \lambda_0 g' + \lambda_0 g'') \\ &= 32 \left[2 m c - m c \sin^2 \vartheta + \lambda_0 g' + \lambda_0 g'' - \lambda_0 (g' g'') \left(\frac{1}{g'} + \frac{1}{g''} \right) \right] \end{aligned}$$

¹⁰⁾ Vgl. sämtliche später genannten Arbeiten.

wo ϑ der Winkel zwischen g' und g'' ist. Für W ergibt sich

$$W = \frac{\pi}{\Delta E} \frac{e^4 \hbar^2}{V^2 |g' g''|} \frac{1}{\lambda \lambda_0 \varepsilon m^2 c^3} \left\{ 2 m c - m c \sin^2 \vartheta + \lambda_0 g' + \lambda_0 g'' - \lambda_0 (g' g'') \left(\frac{1}{g'} + \frac{1}{g''} \right) \right\}. \quad (12)$$

Unter Berücksichtigung der aus dem Impulssatz $p = g' + g''$ und dem Energiesatz $\lambda \varepsilon = \lambda_0 m c + g' + g''$ folgenden Gleichung

$$(g' g'') = g' g'' + \lambda_0 m c (g' + g'') \quad (13)$$

kann man (12) auch umschreiben in

$$W = - \frac{\pi}{\Delta E} \frac{e^4 \hbar^2}{V^2 |g' g''|} \frac{1}{\lambda \lambda_0 \varepsilon m c} \left\{ \sin^2 \vartheta + \frac{g'}{g''} + \frac{g''}{g'} \right\} \quad (12')$$

oder

$$W = - \frac{\pi}{\Delta E} \frac{e^4 \hbar^2}{V^2 |g' g''|} \frac{1}{\lambda \lambda_0 \varepsilon m c} \left\{ \frac{g'}{g''} + \frac{g''}{g'} - 2 \lambda_0 m c \left(\frac{1}{g'} + \frac{1}{g''} \right) - m^2 c^2 \left(\frac{1}{g'} + \frac{1}{g''} \right)^2 \right\}. \quad (12'')$$

Die weitere Berechnung spaltet sich von hier aus für die vier verschiedenen Prozesse auf.

Comptoneffekt: Hier ist $\lambda = \lambda_0 = +1$ (oder beide $= -1$ für den Comptoneffekt am Positron, was an den Formeln nichts ändert). g'' ist das emittierte Streuquant des Effekts, also führen wir von jetzt an wieder g'' in $-g''$, g'' in $-g''$ über.

Für die Dichtefunktion $\frac{1}{\Delta E}$ (s. S. 283) erhält man

$$\frac{1}{\Delta E} = \frac{V}{\hbar^3 g''^2} d\Omega'' \frac{1}{c \frac{d}{dg''} \left\{ g'' + \sqrt{m^2 c^2 + (g' - g'')^2} \right\}},$$

was unter Berücksichtigung von (13) zu

$$\frac{1}{\Delta E} = \frac{V}{\hbar^3 g''^2} d\Omega'' \frac{\varepsilon g''}{m c^2 g'}$$

führt, wobei $d\Omega''$ der Raumwinkel ist, in den das Streuquant fliegt. Setzt man in (12') ein, so ergibt sich unter Einführung des „Elektronenradius“ $r_0 = \frac{e^2}{m c^2}$

$$W = \frac{1}{2} r_0^2 d\Omega'' \frac{c}{V} \frac{g''^2}{g'^2} \left\{ \frac{g'}{g''} + \frac{g''}{g'} - \sin^2 \vartheta \right\}.$$

Ist n' die Anzahl der pro sec und cm^2 einfallenden Lichtquanten, so erhält man hieraus für die Zahl dn'' der pro sec und pro streuendem Elektron in den Raumwinkel $d\Omega''$ in der Streurichtung ϑ gestreuten Quanten

$$dn'' = n' W \frac{V}{c} = n' \frac{1}{2} r_0^2 d\Omega'' \frac{g''^2}{g'^2} \left\{ \frac{g'}{g''} + \frac{g''}{g'} - \sin^2 \vartheta \right\}.$$

Ist $J' = n' c g'$ die Intensität des pro sec und cm^2 einfallenden Lichts, so erhält man für die im Abstand R in der Streurichtung ϑ pro sec durch den cm^2 gehende Intensität des gestreuten Lichts

$$J'' = \frac{1}{R^2} \frac{dn''}{d\Omega''} c g'' = \frac{1}{R^2} \frac{1}{d\Omega''} c g'' n' W \frac{V}{c} = \frac{1}{R^2} \frac{1}{d\Omega''} J' \frac{g''}{g'} W \frac{V}{c}$$

$$J'' = J' \frac{1}{2} \frac{r_0^2}{R^2} \frac{g''^3}{g'^3} \left(\frac{g'}{g''} + \frac{g''}{g'} - \sin^2 \vartheta \right). \quad (14)$$

Berücksichtigt man, daß nach (13) sich für den Impuls g'' und die Frequenz ν' des Streulichts (ν' Frequenz des einfallenden Lichts)

$$g'' = \frac{g' mc}{mc + g' (1 - \cos \theta)} \quad \nu'' = \frac{\nu'}{1 + \gamma (1 - \cos \theta)} \quad \gamma = \frac{h \nu'}{mc^2}$$

ergibt, so erhält man aus (14) die Formel von Klein und Nishina¹¹⁾

$$J'' = J' \frac{1}{2} \frac{r_0^2}{R^2} \frac{1 + \cos^2 \theta}{\{1 + \gamma (1 - \cos \theta)\}^3} \left[1 + \frac{\gamma^2 (1 - \cos \theta)^2}{(1 + \cos^2 \theta) [1 + \gamma (1 - \cos \theta)]} \right]. \quad (15)$$

Durch eine elementare Integration läßt sich die Gesamtzahl n'' der Streuquanten pro sec angeben zu

$$n'' = n' \pi r_0^2 \left[\frac{2\gamma^4 + 18\gamma^3 + 16\gamma^2 + 4\gamma}{\gamma^3 (1 + 2\gamma)^2} + \frac{\gamma^2 - 2\gamma - 2}{\gamma^3} \log(1 + 2\gamma) \right]. \quad (16)$$

Zerstrahlung = Paarvernichtung: Hier ist $\lambda_0 = +1$, $\lambda = -1$. Beide Lichtquanten werden emittiert, also ist in (12) g' in $-g'$, g'' in $-g''$, g' in $-g'$, g'' in $-g''$ zu überführen. Für die Dichtefunktion $\frac{1}{\Delta E}$ erhält man, wenn das Lichtquant g' in den Raumwinkel $d\Omega'$ emittiert wird und p_+ der Impuls des Positrons ist

$$\frac{1}{\Delta E} = \frac{V}{h^3} g'^2 d\Omega' \frac{1}{c \frac{d}{dg'} \{g' + |p_+ - g'|\}}.$$

Mit Hilfe von (13) läßt sich das umrechnen in

$$\frac{1}{\Delta E} = \frac{V}{h^3} g'^2 d\Omega' \frac{g' g''}{mc^2 (g' + g'')}$$

womit sich aus (12') ergibt ($c\varepsilon_+$ = Energie des Positrons)

$$W = \frac{1}{2} r_0^2 d\Omega' \frac{c}{V} \frac{g'^2}{\varepsilon_+ (g' + g'')} \left(\frac{g'}{g''} + \frac{g''}{g'} + \sin^2 \theta \right).$$

Ist n_+ die Anzahl der pro sec und cm^3 einfallenden Positronen und n^* die Anzahl der Elektronen in der Volumeneinheit, so erhält man hieraus für die Zahl dn' der pro sec aus der Volumeneinheit in den Raumwinkel $d\Omega'$ gestreuten Quanten g'

$$dn' = n_+ n^* W \frac{V \varepsilon_+}{c p_+} = n_+ n^* \frac{1}{2} r_0^2 d\Omega' \frac{g'^2}{p_+ (g' + g'')} \left(\frac{g'}{g''} + \frac{g''}{g'} + \sin^2 \theta \right).$$

Ist α der Winkel zwischen g' und p_+ , so folgen aus Energie- und Impulssatz

$$g' = \frac{mc(\varepsilon_+ + mc)}{\varepsilon_+ + mc - p_+ \cos \alpha} \quad g'' = \frac{(\varepsilon_+ + mc)(\varepsilon_+ - p_+ \cos \alpha)}{\varepsilon_+ + mc - p_+ \cos \alpha} \quad \sin \theta = \frac{p_+}{g''} \sin \alpha.$$

Für die Gesamtzahl n_z der pro sec in der Volumeneinheit auftretenden Zerstrahlungsprozesse hat man zu bilden

$$n_z = \frac{1}{2} 2\pi \int_0^\pi \sin \alpha \frac{dn'}{d\Omega'} d\alpha, \quad (17)$$

wobei der Faktor $\frac{1}{2}$ einzusetzen ist, weil die beiden durch Vertauschen von g' und g'' auseinander hervorgehenden Fälle identisch sind und nur einmal gezählt

¹¹⁾ O. Klein u. Y. Nishina, Z. Physik **52**, 853 (1929); Jg. Tamm, Z. Physik **62**, 545 (1930).

werden dürfen. Die Integration ergibt mit $\gamma = \frac{\epsilon_+}{mc}$ ¹²⁾

$$n_z = n_+ n_-^* \pi r_0^2 \frac{1}{\gamma + 1} \left[\frac{\gamma^2 + 4\gamma + 1}{\gamma^2 - 1} \log(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}) - \frac{\gamma + 3}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \right] \quad (18)$$

Durch eine Transformation in das Bezugssystem, in dem Elektron und Positron entgegengesetzt gleichen Impuls vom Betrag P haben, kann man bei einer (pro sec und cm³) einfallenden Zahl von N_- Elektronen und N_+ Positronen die in 1 sec und 1 cm³ auftretende Zahl N_z von Zerstrahlungsprozessen angeben zu ¹³⁾

$$N_z = \frac{1}{c} N_+ N_- \frac{1}{2} \pi r_0^2 \frac{m^2 c^3}{P^2} \left[\frac{3 - \beta^4}{\beta} \log \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - 2(2 - \beta^2) \right] \quad \beta = \frac{P}{G} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + m^2 c^2}}. \quad (19)$$

Da $\frac{N_z}{N_+ N_-}$ für $P \rightarrow 0$ divergiert, gibt man für kleine P die Zahl N_z der Zerstrahlungsprozesse besser in Abhängigkeit von der Teilchendichte (Anzahl pro cm³) N_-^* und N_+^* im Elektronen- und Positronenstrahl ¹⁴⁾

$$N_z = c N_+^* N_-^* \frac{1}{2} \pi r_0^2 \frac{m^2 c^2}{G^2} \left[\frac{3 - \beta^4}{\beta} \log \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - 2(2 - \beta^2) \right]. \quad (20)$$

Durch Grenzübergang ($P \rightarrow 0$, $G \rightarrow mc$) erhält man hieraus die in Materie von N_A Atomen pro cm³ zu je Z Elektronen je Sekunde und je (langsamem!) Positron auftretende Zahl von Zerstrahlungsprozessen zu

$$N_z = N_A Z \pi r_0^2 c. \quad (21)$$

Paarerzeugung: Hier ist umgekehrt $\lambda_0 = -1$, $\lambda = +1$ zu setzen. Da beide Lichtquanten absorbiert werden, ist an den g -Vorzeichen nichts zu ändern. Da zur Vereinfachung der Rechnung (s. S. 288) $p_0 = 0$, $\epsilon_0 = mc$ gesetzt worden war, erhält man zunächst die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zwei Lichtquanten g' und g'' ein Paar mit ruhendem Positron und einem Elektron vom Impuls p im Raumwinkel $d\omega$ bilden. Für die Dichtefunktion erhält man

$$\frac{1}{AE} = \frac{V}{h^3} p^2 d\omega \frac{1}{c \frac{d}{dp} (mc + \sqrt{m^2 c^2 + p^2})} = \frac{V}{h^3} \frac{\epsilon p}{c} d\omega$$

und aus (12')

$$W = \frac{1}{2} r_0^2 d\omega \frac{c}{V} \frac{m c p}{g' g''} \left(\frac{g'}{g''} + \frac{g''}{g'} + \sin^2 \theta \right).$$

Sind n' und n'' die Zahl der pro sec und cm³ einfallenden Lichtquanten, so ergibt sich für die Zahl dn der pro sec und cm³ erzeugten Paare mit ruhendem Positron und in den Raumwinkel $d\omega$ fliegendem Elektron

$$dn = \frac{n' V}{c} \cdot \frac{n'' V}{c} \cdot \frac{W}{V} = \frac{1}{c} n' n'' \frac{1}{2} r_0^2 d\omega \frac{m c p}{g' g''} \left(\frac{g'}{g''} + \frac{g''}{g'} + \sin^2 \theta \right).$$

¹²⁾ P. A. M. Dirac, Proc. Cambridge Philos. Soc. **26**, 361 (1930).

¹³⁾ Große Buchstaben N , P , G , beziehen sich stets auf das Schwerpunktsystem der einfallenden Teilchen; n , N bedeuten Teilchenströme (pro sec und cm³), n^* , N^* Teilchendichten (pro cm³).

¹⁴⁾ Der entsprechenden Wirkungsquerschnitt ist also

$$\Phi = \frac{r_0^2 c m^2 c^3}{4 P^2} \beta \left[\frac{3 - \beta^4}{\beta} \log \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - 2(2 - \beta^2) \right];$$

s. W. Heitler, The Quantum Theory of Radiation, 1936, S. 207 (8), wo c^2 im Nenner fehlt.

Wir gehen über in das Bezugssystem, in dem die Impulse der einfallenden Lichtquanten und wegen des Impulssatzes auch die Impulse der erzeugten Paare entgegengesetzt gleich groß sind. Man erhält (neues System in großen Buchstaben, α = Winkel zwischen Licht- und Teilchenimpuls im neuen System, $G = \frac{h\nu}{c}$ des einfallenden Lichts, Teilchenimpuls $P = \sqrt{G^2 - m^2 c^2}$)

$$dN = \frac{1}{c} N' N'' \frac{1}{2} r_0^2 d\Omega \frac{m^2 c^2 P}{G^3} \frac{G^4 - P^4 \cos^4 \alpha + 2 m^2 c^2 P^2 \sin^2 \alpha}{(G^2 - P^2 \cos^2 \alpha)^2}$$

Die Gesamtzahl N aller pro sec und cm^3 gebildeten Paare erhält man hieraus durch Integration über den Raumwinkel zu¹⁵⁾

$$N = \frac{1}{c} N' N'' \pi r_0^2 \frac{m^2 c^2 P}{G^3} \left[\frac{3 - \beta^4}{\beta} \log \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - 2(2 - \beta^2) \right] \quad \beta = \frac{P}{G}. \quad (22)$$

6. Prozesse dritter Ordnung

a) Die Übergangswahrscheinlichkeit

Die Prozesse dritter Ordnung unterscheiden sich von den vier einfachen Prozessen zweiter Ordnung (Comptoneffekt am Elektron oder Positron, Paarzeugung, Zerstrahlung) durch das Auftreten eines dritten Lichtquants. Da dieses entweder absorbiert oder emittiert werden kann, gibt es acht verschiedene Prozesse dritter Ordnung. Bei vier von ihnen (Prozesse A) sind die einfachen Prozesse dadurch erweitert, daß ein zusätzliches Lichtquant emittiert wird, bei den restlichen vier (Prozesse B) findet der einfache Prozeß unter der zusätzlichen Anregung eines beim Prozeß absorbierten Lichtquants statt.

Die Ausgangsformeln für die Wahrscheinlichkeit dieser Prozesse lassen sich wieder einheitlich gewinnen, wenn man wie in Abschnitt 5 Energievorzeichen λ einführt und verabredet, daß für Impuls und Energie emittierter Lichtquanten $-g$ und $-cg$ geschrieben wird. Man hat dann folgendes Schema

Anfangszustand des Elektrons	p_0, λ_0, σ_0
1. Zwischenzustand	$p' = p_0 + g, \lambda', \sigma'$
2. Zwischenzustand	$p'' = p_0 + g_1 + g_2, \lambda'', \sigma''$
Endzustand	$p = p_0 + g_1 + g_2 + g_3, \lambda, \sigma$

Statt der hier benutzten Reihenfolge g_1, g_2, g_3 der Lichtquanten kann auch eine andere Permutation g_1, g_3, g_2 bis g_3, g_2, g_1 auftreten. $\sum_{\mathfrak{P}}$ bedeutet in den folgenden Formeln die Summe über diese sechs Permutationen. Analog (10) erhält man

$$W = \frac{2\pi}{\hbar \Delta E} \frac{e^6 c^3 \hbar^3}{V^3 |g_1 g_2 g_3|} \left| \sum_{\mathfrak{P}} \sum_{\lambda'} \sum_{\sigma'} \sum_{\lambda''} \sum_{\sigma''} \frac{(a_0^* \alpha_1 a') (a'^* \alpha_2 a'') (a''^* \alpha_3 a)}{c^2 (\lambda_0 \epsilon_0 + g_1 - \lambda' \epsilon') (\lambda_0 \epsilon_0 + g_1 + g_2 - \lambda'' \epsilon'')} \right|^2$$

(α_i bedeutet αe_i). Die zweite Klammer im Nenner kann auf Grund des Energiesatzes auch $\lambda \epsilon - g_3 - \lambda'' \epsilon''$ geschrieben werden. Im allgemeinen interessiert man sich wieder nur dafür, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Prozeß beim Aufein-

¹⁵⁾ G. Breit u. J. A. Wheeler, Physic. Rev. 46, 1087. (1934).

andertreffen von Teilchenströmen geschieht, in denen kein Spin- oder Polarisationszustand bevorzugt auftritt. Das erfordert Mittelung über diese Richtungen im Anfangszustand, Summierung über diese Richtungen im Endzustand oder Summierung über alle diese Richtungen und Zufügen eines Faktors $f = \frac{1}{4}$ für die vier Prozesse A, $f = \frac{1}{8}$ für die vier Prozesse B. Also

$$W = \frac{2\pi}{\alpha \Delta E} \frac{e^6 c^3 \hbar^3}{V^3 |g_1 g_2 g_3|} f \sum_{\epsilon_1} \sum_{\epsilon_2} \sum_{\epsilon_3} \sum_{\sigma} \left| \sum_{\mathfrak{P}} \sum_{\lambda'} \sum_{\sigma'} \sum_{\lambda''} \sum_{\sigma''} \frac{(a_0^* \alpha_1 a') (a'^* \alpha_2 a'') (a''^* \alpha_3 a)}{c^2 (\lambda_0 \epsilon_0 + g_1 - \lambda' \epsilon') (\lambda \epsilon - g_3 - \lambda'' \epsilon'')} \right|^2.$$

Sämtliche Summierungen über Spinrichtungen und Energievorzeichen lassen sich wie in Abschnitt 5 durchführen unter Benutzung der Operatoren $\hbar = \alpha p + \beta m c$. Man erhält dabei

$$W = \frac{2\pi}{\hbar \Delta E} \frac{e^6 c^3 \hbar^3}{V^3 |g_1 g_2 g_3|} f \sum_{\epsilon_1} \sum_{\epsilon_2} \sum_{\epsilon_3} \text{Spur} \sum_{\mathfrak{P}} \frac{\alpha_1 (\lambda_0 \epsilon_0 + g_1 + \hbar') \alpha_2 (\lambda \epsilon - g_3 + \alpha') \alpha_3}{c^2 \{(\lambda_0 \epsilon_0 + g_1)^2 - \epsilon'^2\} \{(\lambda \epsilon - g_3)^2 - \epsilon''^2\}} \cdot \frac{\lambda \epsilon + \hbar}{2 \lambda \epsilon} \quad (23)$$

$$\cdot \sum_{\mathfrak{P}} \frac{\alpha_3 (\lambda \epsilon - g_3 + \hbar'') \alpha_2 (\lambda_0 \epsilon_0 + g_1 + \hbar') \alpha_1}{c^2 \{(\lambda_0 \epsilon_0 + g_1)^2 - \epsilon'^2\} \{(\lambda \epsilon - g_3)^2 - \epsilon''^2\}} \cdot \frac{\lambda_0 \epsilon_0 + \hbar_0}{2 \lambda_0 \epsilon_0}.$$

Berücksichtigen wir Energie- und Impulssatz, so ist

$$(\lambda_0 \epsilon_0 + g_1)^2 - \epsilon'^2 = 2 (\lambda_0 \epsilon_0 g_1 - p_0 g_1)$$

$$(\lambda \epsilon - g_3)^2 - \epsilon''^2 = -2 (\lambda \epsilon g_3 - p g_3).$$

Setzen wir das in (23) ein und ziehen den Faktor $2^6 c^4 \lambda \lambda_0 \epsilon \epsilon_0$ heraus, so wird

$$W = \frac{\pi}{32 \hbar \Delta E} \frac{e^6 \hbar^3}{V^3 c |g_1 g_2 g_3|} \frac{f}{\lambda \lambda_0 \epsilon \epsilon_0} \sum_{\epsilon_1} \sum_{\epsilon_2} \sum_{\epsilon_3} \text{Spur} \sum_{\mathfrak{P}} \frac{\alpha_1 (\lambda_0 \epsilon_0 + g_1 + \hbar') \alpha_2 (\lambda \epsilon - g_3 + \hbar'') \alpha_3}{(\lambda_0 \epsilon_0 g_1 - p_0 g_1) (\lambda \epsilon g_3 - p g_3)} \cdot (\lambda \epsilon + \hbar) \quad (24)$$

$$\cdot \sum_{\mathfrak{P}} \frac{\alpha_3 (\lambda \epsilon - g_3 + \hbar'') \alpha_2 (\lambda_0 \epsilon_0 + g_1 + \hbar') \alpha_1}{(\lambda_0 \epsilon_0 g_1 - p_0 g_1) (\lambda \epsilon g_3 - p g_3)} \cdot (\lambda_0 \epsilon_0 + \hbar_0).$$

Aus dieser Gleichung läßt sich wegen des Auftretens von ϵ^6 entnehmen, daß sich die Wirkungsquerschnitte zu

$$\Phi = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \cdot \frac{e^2}{\hbar c} \cdot (\text{dimensionslose Kombinationen von } m, c, g_1, g_2, g_3, \epsilon_0, \epsilon, p_0, p) \quad (25)$$

ergeben werden. Sie sind also wegen des Auftretens des Faktors $\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$ im allgemeinen kleiner als die Wirkungsquerschnitte der entsprechenden Prozesse zweiter Ordnung. Es kann nun eintreten und tritt auch ein, daß für bestimmte Größenordnungen der Energien und Impulse diese Verringerung auf den 137. Teil durch den dritten Faktor in (25) wieder ausgeglichen wird. Weiter kann man aus (24) ablesen, daß eine allgemeine für alle Größen der Teilchen- und Lichtquanten-

impulse gültige Berechnung wegen des Auftretens von 36 Spuren ($\sum_{\mathfrak{P}}$ mit sechs Summanden $\cdot \sum_{\mathfrak{P}}$ mit wieder sechs Summanden) nur schwer möglich ist. Auch die im Abschnitt 5 benutzte Vereinfachung $p_0 = 0$, $\epsilon_0 = mc$ macht die Berechnung noch nicht wesentlich leichter; sie gelingt erst, wenn man noch voraussetzt, daß zum mindesten ein Teil der auftretenden Impulse groß gegen mc ist.

b) *Bereits berechnete Wirkungsquerschnitte und Übergangswahrscheinlichkeiten*

Bisher ist die Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens berechnet worden für zwei der Prozesse A, bei denen ein zusätzliches Lichtquant emittiert wird, und zwar:

a) $\lambda_0 = \lambda = +1$, die „Doppel-Comptonstreuung“, d. h. ein Comptoneffekt, bei dem das einfallende Lichtquant zwei Streuquanten bildet¹⁶⁾.

b) $\lambda_0 = -1$, $\lambda = +1$, d. h. die Erzeugung eines Elektron-Positron-Paares unter Absorption zweier Lichtquanten und gleichzeitiger Emission eines dritten Lichtquants¹⁷⁾. Noch nicht berechnet ist der Fall

c) $\lambda_0 = +1$, $\lambda = -1$, die „Dreifachzerstrahlung“, d. h. die Zerstrahlung eines Paares unter Bildung von drei Lichtquanten. Für diesen Prozeß soll im folgenden die Wahrscheinlichkeit angegeben und mit der der Zerstrahlung in zwei Lichtquanten verglichen werden.

c) *Die Dreifachzerstrahlung*

Wir gehen aus von (24) und führen die Rechnung in dem Bezugssystem durch, in dem das Paar entgegengesetzt gleichen Impuls hat. Wir haben also

$$\epsilon_0 = \epsilon \quad p_0 = p.$$

Zugleich berücksichtigen wir, daß alle drei Lichtquanten emittiert werden, führen also in (24) g , g in $-g$, $-g$ über. Wir erhalten so (mit $f = \frac{1}{2}$, $\lambda_0 = +1$, $\lambda = -1$)

$$W = \frac{\pi}{128 \hbar \Delta E} \frac{e^3 \hbar^3 \hbar^3}{V^2 c g_1 g_2 g_3} \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{\epsilon_1} \sum_{\epsilon_2} \sum_{\epsilon_3} \text{Spür} \\ \sum_{\mathfrak{P}} \frac{\alpha_1 (\epsilon - g_1 + h') \alpha_2 (\epsilon - g_3 - h'') \alpha_3}{(\epsilon g_1 - p g_1) (\epsilon g_3 + p g_3)} \cdot (\epsilon - h) \\ \cdot \sum_{\mathfrak{P}} \frac{\alpha_3 (\epsilon - g_3 - h'') \alpha_2 (\epsilon - g_1 + h') \alpha_1}{(\epsilon g_1 - p g_1) (\epsilon g_3 + p g_3)} \cdot (\epsilon + h),$$

wo $h = \alpha p + \beta mc$, $h' = \alpha p - \alpha g_1 + \beta mc$, $h'' = \alpha p + \alpha g_3 + \beta mc$ ist.

Der Gesamtimpuls des Paares ist gleich Null, die Energie ist 2ϵ , also muß $g_1 + g_2 + g_3 = 0$, $g_1 + g_2 + g_3 = 2\epsilon$ sein. Die Impulse der Lichtquanten können also in einer Ebene beliebiger Normalenrichtung liegen; sie müssen sich nur zu einem Impulsdreieck schließen (Impulsatz), und der Umfang dieses Dreiecks muß 2ϵ sein (Energiesatz). Für eins der Lichtquanten, etwa g_3 , sind Impulsrichtung und -größe frei wählbar, für ein zweites Lichtquant, etwa g_1 , ist noch die Richtung

frei wählbar. Für die Dichtefunktion $\frac{1}{\Delta E}$ erhält man

$$\frac{1}{\Delta E} = \frac{V^2}{\hbar^6} g_1^2 d\Omega_1 g_3^2 d\Omega_3 dg_3 \frac{1}{c \frac{d}{dg_1} (g_1 + g_3 + \sqrt{(g_1 + g_3)^2})},$$

¹⁶⁾ W. Heitler u. L. Nordheim, *Physica* 1, 1059 (1934).

¹⁷⁾ B. Kockel, l. c.

also unter Benutzung von Energie- und Impulssatz

$$\frac{1}{\Delta E} = \frac{V^2}{\hbar^6} g_1^2 d\Omega_1 g_3^2 d\Omega_3 dg_3 \frac{g_1 g_2}{2c\varepsilon(\varepsilon - g_3)}.$$

Man erhält

$$W = \frac{1}{1024\pi^3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{c^2}{\hbar c} \frac{c}{V} \frac{g_1 g_3}{\varepsilon^2} \frac{m^2 c^2 g_1}{2\varepsilon(\varepsilon - g_3)} d\Omega_1 d\Omega_3 dg_3 \sum_{\epsilon_1} \sum_{\epsilon_2} \sum_{\epsilon_3} \text{Spur} \dots$$

Sind N_- , N_+ die Zahl der pro sec und cm^2 einfallenden Elektronen und Positronen, so läßt sich die Zahl dN derjenigen pro sec im cm^3 eintretenden Dreifachzerstrahlungen, bei denen eins der entstehenden Lichtquanten einen Impuls zwischen g_3 und $g_3 + dg_3$ hat und in den Raumwinkel $d\Omega_3$ um g_3 , ein weiteres Lichtquant in den Raumwinkel $d\Omega_1$ fliegt, angeben zu

$$dN = \frac{1}{c} N_- N_+ \frac{1}{1024\pi^3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{c^2}{\hbar c} \frac{g_1 g_3}{p^2} \frac{m^2 c^2 g_1}{2\varepsilon(\varepsilon - g_3)} d\Omega_1 d\Omega_3 dg_3 \sum_{\epsilon_1} \sum_{\epsilon_2} \sum_{\epsilon_3} \text{Spur} \dots$$

Die Gesamtzahl von Dreifachzerstrahlungen pro sec und cm^3 bekommt man hieraus durch Integration

$$N = \frac{1}{6c} N_- N_+ \iiint d\Omega_1 d\Omega_3 \int_0^\varepsilon dg_3 \frac{1}{1024\pi^3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{c^2}{\hbar c} \frac{g_1 g_3}{p^2} \frac{m^2 c^2 g_1}{2\varepsilon(\varepsilon - g_3)} \sum_{\epsilon_1} \sum_{\epsilon_2} \sum_{\epsilon_3} \text{Spur} \dots \quad (26)$$

Der größte und kleinste mögliche Wert für den Impuls eines Lichtquants sind 0 und ε . Der dem Faktor $\frac{1}{2}$ in Gleichung (17) entsprechende Faktor $\frac{1}{6}$ ist beizufügen, weil die Fälle Emission von g_1 , g_2 , g_3 , von $g'_1 = g_1$, $g'_2 = g_3$, $g'_3 = g_2$ usw. nur einmal zu zählen sind.

Für die Berechnung der Gesamtzahl von Dreifachzerstrahlungen ist es nun vollständig gleichgültig, welche Lichtquanten wir bei der Raumwinkel- und Impulsintegration bevorzugen. Wir können also auch schreiben unter Ziehen einer der $\sum_{\mathfrak{g}}$ bis vor das Integral

$$N = \frac{1}{6c} N_- N_+ \sum_{\mathfrak{g}} \frac{1}{1024\pi^3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{c^2}{\hbar c} \iiint d\Omega_1 d\Omega_3 \int_0^\varepsilon dg_3 \frac{g_1 g_3}{p^2} \frac{m^2 c^2 g_1}{2\varepsilon(\varepsilon - g_3)} \sum_{\epsilon_1} \sum_{\epsilon_2} \sum_{\epsilon_3} \text{Spur} \dots \quad (27)$$

$$\frac{\alpha_1(\varepsilon - g_1 + \hbar') \alpha_2(\varepsilon - g_3 - \hbar'') \alpha_3}{(\varepsilon g_1 - p g_1)(\varepsilon g_3 + p g_3)} \cdot (\varepsilon - \hbar) \cdot \sum_{\mathfrak{g}} \frac{\alpha_3(\varepsilon - g_3 - \alpha'') \alpha_2(\varepsilon - g_1 + \hbar') \alpha_1}{(\varepsilon g_1 - p g_1)(\varepsilon g_3 + p g_3)} \cdot (\varepsilon + \hbar).$$

Die erste $\sum_{\mathfrak{g}}$ gibt einfach einen Faktor 6, also

$$N = \frac{1}{c} N_- N_+ \frac{1}{1024\pi^3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{c^2}{\hbar c} \iiint d\Omega_1 d\Omega_3 \int_0^\varepsilon dg_3 \frac{g_1 g_3}{p^2} \frac{m^2 c^2 g_1}{2\varepsilon(\varepsilon - g_3)} \sum_{\epsilon_1} \sum_{\epsilon_2} \sum_{\epsilon_3} \text{Spur} \dots \quad (28)$$

d) Die Dreifachzerstrahlung bei hoher Energie der Teilchen

Die Berechnung von (28) ist nur schwerlich allgemein möglich. Sind jedoch die Energien des Elektrons und des Positrons groß gegen mc^2 , so ergibt sich eine Möglichkeit zu einer genäherten Berechnung auf Grund einer Eigenschaft der Nenner in (27). Jeder Nennerfaktor

$$\varepsilon g \pm p g \approx g \left\{ \frac{m^2 c^2}{2p} + p (1 \pm \cos(p g)) \right\} \quad \text{für } \varepsilon, p \gg mc$$

hat die Eigenschaft, wenn g antiparallel bzw. parallel zu p ist, sehr klein zu werden. Man erhält also eine brauchbare Näherung, wenn man nur für die Nachbarschaft solcher Lagen die Spur in (28) exakt berechnet. In Anhang I wird gezeigt, daß man dabei nur zwei von den sechs Spuren zu berücksichtigen braucht. In Anhang II und III werden diese Spuren berechnet. Addiert man ihre Beiträge, so erhält man nach (27), (28), (39) und (42)

$$N = \frac{1}{c} N_- N_+ \frac{1}{1024 \pi^2} \left(\frac{e^2}{m c^2} \right)^2 \frac{e^2}{\hbar c} 256 \int_0^\pi dg_3 \frac{g_3^2}{p^2} \frac{m^2 c^2}{2 \varepsilon} \frac{g_3}{\varepsilon - g_3} \cdot \iint d\Omega_1 \frac{1}{\varepsilon - p \cos(\vartheta_1)} \iint d\Omega_3 \left\{ \left[\frac{1}{\varepsilon + p \cos(\vartheta_3)} + \frac{p^2 (\varepsilon - g_3) \sin^2(\vartheta_3)}{g_3^2 (\varepsilon + p \cos(\vartheta_3))^2} \right] \right. \quad (29)$$

$$\left. + \frac{1}{2} \frac{p^3}{g_3 (\varepsilon - g_3)} \frac{\sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3)}{(\varepsilon + p \cos(\vartheta_3)) (\varepsilon + p \cos(\vartheta_2))} \right\}$$

($\vartheta_2, \vartheta_3, \varphi_2, \varphi_3$ siehe Anhang III). Der stärkste Beitrag rührt von der Nachbarschaft der Lage: g_2, g_3 antiparallel zu p, g_1 parallel zu p , ($g_1 \approx p \approx \varepsilon$) her. Nur über die Nachbarschaft dieser Lage wird integriert. Für die in der eckigen Klammer stehenden Ausdrücke ist das einfach. Mit $q = \frac{m c}{p}$ ergibt sich

$$\iint \frac{d\Omega_1}{\varepsilon - p \cos(\vartheta_1)} = 2\pi \int_0^\pi \frac{\sin(\vartheta_1) d(\vartheta_1)}{\varepsilon - p \cos(\vartheta_1)} \approx 2\pi \frac{1}{p} \int_0^\pi \frac{x dx}{q^2 + x^2} \approx \frac{4\pi}{p} \log \frac{1}{q}$$

$$= \frac{4\pi}{p} \log \frac{p}{m c}.$$

Entsprechend ergibt sich

$$\iint d\Omega_3 \left[\frac{1}{\varepsilon + p \cos(\vartheta_3)} + \frac{p^2 (\varepsilon - g_3)}{g_3^2} \frac{\sin^2(\vartheta_3)}{(\varepsilon + p \cos(\vartheta_3))^2} \right] \approx \frac{4\pi}{p} \log \frac{p}{m c} \left(1 + 2 \frac{p(p - g_3)}{g_3^2} \right).$$

Also hat man zunächst als Beitrag zu (29)

$$\frac{16\pi^2}{p^2} \left(1 + 2 \frac{p(p - g_3)}{g_3^2} \right) \log^2 \frac{p}{m c}.$$

Das Raumwinkelintegral des noch fehlenden Anteils (außerhalb der eckigen Klammer) ist in Anhang IV berechnet und ergibt als Beitrag zu (29)

$$- \frac{8\pi^2}{g_3^2} \log^2 \frac{p}{m c}.$$

Also ist schließlich

$$N = \frac{1}{c} N_- N_+ \left(\frac{e^2}{m c^2} \right)^2 \frac{e^2}{\hbar c} \frac{m^2 c^2}{p^2} \log^2 \frac{p}{m c} \int_0^\pi \frac{g_3 d g_3}{\varepsilon (\varepsilon - g_3)} \left\{ 2 + 4 \frac{p(p - g_3)}{g_3^2} - \frac{p^2}{g_3^2} \right\}$$

was auch vereinfacht werden kann zu¹⁸⁾

$$N = \frac{1}{c} N_- N_+ \left(\frac{e^2}{m c^2} \right)^2 \frac{e^2}{\hbar c} \frac{m^2 c^2}{p^2} \log^2 \frac{p}{m c} \cdot 2 \int_0^\pi dg_3 \left\{ \frac{g_3}{\varepsilon - g_3} + \frac{p}{g_3} + \frac{p(\frac{1}{2}\varepsilon - g_3)}{g_3(\varepsilon - g_3)} \right\}. \quad (30)$$

¹⁸⁾ Entsprechend dem Rechenverfahren fehlen in (30) Ausdrücke, die $\log \frac{p}{m c}$ proportional sind; mit anderen Worten: in (30) kann noch ein Zahlenfaktor a der Größenordnung 1 in der Form $\log^2 \frac{a p}{m c}$ statt $\log^2 \frac{p}{m c}$ auftreten.

Bilden wir hieraus die Gesamtzahl der Dreifachzerstrahlungen, so finden wir, daß das Integral über dg_3 divergiert sowohl an seiner unteren wie an seiner oberen Grenze. Diese Divergenzen sind nicht etwa fiktiv, also nicht nur durch die Vernachlässigung des Rechenverfahrens entstanden¹⁹⁾. Beide Divergenzen haben ihre Ursache darin, daß Lichtquanten beliebig kleinen Impulses auftreten können. An der unteren Grenze des Integrals kann $g_3 \rightarrow 0$ gehen; an der oberen Grenze, wo $g_3 \approx \varepsilon$ ist, kann einer der beiden anderen Lichtquantenimpulse beliebig klein werden. Divergenzen dieser Art sind, als „Infrarotkatastrophe“ bezeichnet, schon öfter aufgetreten, so z. B. bei der Behandlung eines anderen Prozesses dritter Ordnung, der Paarerzeugung unter gleichzeitiger Emission eines Lichtquants (Prozess $\lambda_0 = +1$, $\lambda = -1$ von Seite 294) oder der Behandlung der Bremsstrahlung²⁰⁾. Die Auflösung dieser Schwierigkeit liegt in folgendem: Die genannten Prozesse können geschehen unter Emission weiterer und zwar beliebig vieler Lichtquanten²¹⁾, und nur die Intensität des insgesamt emittierten Lichts bleibt endlich²²⁾. Im Grenzübergang $g_3 \rightarrow 0$ bleibt also die Intensität endlich²³⁾, die Anzahl der Lichtquanten geht jedoch gegen unendlich. Damit wird die übliche Methode, die Prozesse nach ihrer Ordnung, d. h. der Anzahl der beteiligten Lichtquanten einzuteilen, illusorisch. Berechnungen, die dieses Verfahren einschlagen, können also die Wahrscheinlichkeit dieser Prozesse nur für den Fall angeben, daß die beteiligten Lichtquanten einen hinreichend von 0 verschiedenen Impuls besitzen. Die Gleichung (30) kann also entsprechend nur aussagen, wie groß die Zahl der Dreifachzerstrahlungen unter Emission hinreichend kurzwelliger Lichtquanten ist.

Solange noch keine Theorie vorliegt, die es ermöglicht, Prozesse mit einer beliebigen Anzahl beteiligter Lichtquanten ohne die Entwicklung nach dieser Anzahl zu berechnen, bleibt nichts anderes übrig, als (30) mit einem Abschneideverfahren zu behandeln. Wir integrieren über dg_3 also nur von mc bis $\varepsilon - mc$ und erhalten

$$N = \frac{1}{c} N_- N_+ \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{e^2}{\hbar c} 4 \frac{m^2 c^2}{p^2} \log \frac{p}{mc}. \quad (31)$$

e) Vergleich: Zweifachzerstrahlung-Dreifachzerstrahlung

Die (31) entsprechende Zahl von Zweifachzerstrahlungen, d. h. die Anzahl von Zweifachzerstrahlungen im cm^3 bei einer einfallenden Zahl von N_- , N_+ Elektronen bzw. Positronen pro sec und cm^2 erhält man aus (19), wenn man dort $\beta \rightarrow 1$ gehen läßt und nur die höchste, hier lineare Potenz von $\log \frac{p}{mc}$ aufschreibt zu

$$N = \frac{1}{c} N_- N_+ \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 2n \frac{m^2 c^2}{p^2} \log \frac{p}{mc}. \quad (32)$$

¹⁹⁾ Rechnet man die Spuren und die Integration über die Raumwinkel exakt für $g_3 \approx 0$ und $g_3 \approx \varepsilon$ aus — im letzteren Fall führt man am besten elliptische Koordinaten mit g_3 als Verbindungslinie der Brennpunkte ein — so findet man wieder die Proportionalität zu $\frac{dg_3}{g_3}$ oder $\frac{\varepsilon - g_3}{\varepsilon}$.

²⁰⁾ N. F. Mott, Proc. Cambridge philos. Soc. **27**, 255 (1931); A. Sommerfeld, Ann. Physik **11**, 257 (1931); H. Bethe u. W. Heitler, Proc. Roy. Soc. London A **146**, 83 (1934).

²¹⁾ Der Energiesatz muß natürlich gewahrt bleiben.

²²⁾ F. Bloch u. A. Nordsieck, Physic. Rev. **52**, 54 (1937).

²³⁾ Die Intensität $J(\nu)$ kann auch unendlich werden, wenn die Frequenz $\nu \rightarrow 0$ geht. $\int J(\nu) d\nu$ bleibt natürlich endlich. Das ist z. B. der Fall bei der Bremsstrahlung, die ein Elektron beim Durchgang durch ein reines Coulombfeld aussendet.

Die Dreifachzerstrahlung ist also zunächst um den Faktor $\frac{e^2}{\hbar c}$, also 137mal seltener. Für sehr hohe Energien kann dieser Faktor jedoch durch die höhere Potenz des $\log \frac{p}{mc}$ ausgeglichen werden. Wegen der Unsicherheit in der Berechnung von (31) und der geringen Variabilität des Logarithmus kann man aber die Energie, für die das eintritt, nicht aus (31) und (32) entnehmen. Die folgende Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeit der Zweifachzerstrahlung (Kurve A nach Formel (19), Kurve B nach Formel (20)) und der Dreifachzerstrahlung (Kurve C nach Formel (31)), wobei im letzteren Fall eine Unsicherheit um den Faktor $\sqrt{10}$ nach oben oder unten angenommen wurde. Die Abbildung ist weit über den interessierenden Bereich der Teilchenenergie von etwa 0,5 bis 1000 MeV hinausgezeichnet, damit die bei sehr hohen Energien auftretende größere Wahrscheinlichkeit der Dreifachzerstrahlung sichtbar wird. (Über die Gültigkeit der Ergebnisse in dem Gebiet gleicher oder größerer Wahrscheinlichkeit der Dreifachzerstrahlung vgl. Seite 282). Da in dem experimentell erreichbaren Energiebereich die Zweifachzerstrahlung häufiger eintritt als die Dreifachzerstrahlung, ist an den Folgerungen, die man nach Berechnung der Wahrscheinlichkeit der Zweifachzerstrahlung zog, nichts zu ändern. Sowohl die Lebenszeit langsamer Positronen wie der Anteil der Zerstrahlung an der Abbremsung schneller durch Materie fliegender Positronen bleiben weiter durch die Zweifachzerstrahlung bestimmt.

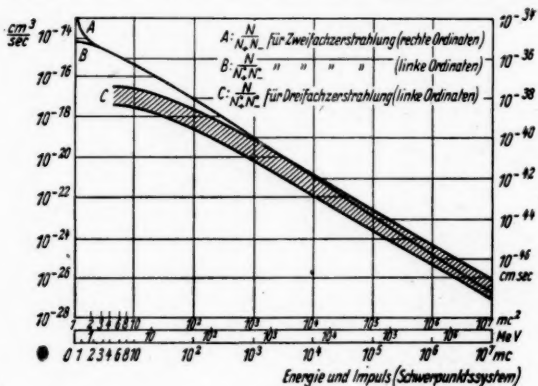


Abb. 1

Anhang I. Die Spuren bei der Dreifachzerstrahlung

Die Nenner dieser Spuren sind nach (27) von der Form

$$g_1 g_2 g_3 g_4 (\varepsilon - p \cos(\varphi_{g_1})) (\varepsilon + p \cos(\varphi_{g_2})) (\varepsilon + p \cos(\varphi_{g_3})) (\varepsilon - p \cos(\varphi_{g_4})) \quad (33)$$

wo i, j, k eine der Permutationen von 1, 2, 3 ist. Jeder der Klammerfaktoren wird wegen $p \gg mc$, $\varepsilon \approx p$ fast = 0, wenn g_1 oder g_2 fast parallel zu p , g_3 oder g_4 fast antiparallel zu p werden. Für die Nachbarschaft dieser speziellen Lagen kann man mit $q = \frac{mc}{p}$, $q \ll 1$ schreiben

$$\varepsilon \pm p \cos(\varphi_{g_i}) = \frac{p}{2} (q^2 + \sin^2(\varphi_{g_i})).$$

Die Zähler Z haben die Form

$$Z = \sum_{e_1} \sum_{e_2} \sum_{e_3} \text{Spur } \alpha_2 B \alpha_j A \quad \alpha_2 = \alpha e_2, \alpha_j = \alpha e_j, \quad (34)$$

wo

$$B = (\varepsilon - \alpha p - \beta m c - g_3 - \alpha g_3) \alpha_3 (\varepsilon - \alpha p - \beta m c) \alpha_k (\varepsilon - \alpha p - \beta m c - g_k - \alpha g_k) \quad (35)$$

$$A = (\varepsilon + \alpha p + \beta m c - g_i - \alpha g_i) \alpha_i (\varepsilon + \alpha p + \beta m c) \alpha_1 (\varepsilon + \alpha p + \beta m c - g_1 - \alpha g_1). \quad (36)$$

Wir untersuchen A weiter. Unter Benutzung von $(\varepsilon + \alpha p + \beta m c) \cdot (\varepsilon - \alpha p - \beta m c) = 0$ findet man

$$A = \{\alpha_i (g_i - \alpha g_i) - 2(p e_i)\} (\varepsilon + \alpha p + \beta m c) \{(g_1 - \alpha g_1) \alpha_1 - 2(p e_1)\}. \quad (37)$$

Wenn g_1 fast parallel zu p ist, so ist $(p e_1)$ proportional zu $\sin(p g_1)$, $g_1 - \alpha g_1 = g_1(1 - \alpha_2) + \sin(p g_1)$ proportionalen Termen (z -Richtung sei die Richtung von p). Für $\varepsilon + \alpha p + \beta m c$ kann man wegen $p \gg m c$ schreiben $p \{(1 + \alpha_2) + \beta q + \frac{1}{2} q^2\}$. Da $(1 + \alpha_2)(1 - \alpha_2) = 0$ ist, folgt, daß das Produkt der 2. und 3. Klammer in (37) sich zusammensetzt aus Ausdrücken, die zu βq , q^2 oder $\sin(p g_1)$ proportional sind, wenn $\varepsilon - p \cos(p g_1)$ fast = 0 wird.

Wenn g_i fast parallel zu p und damit der Nennerfaktor $\varepsilon - p \cos(p g_i)$ fast = 0 wird, gilt das Entsprechende.

Werden sowohl g_1 wie g_i fast parallel zu p , so findet man auf die gleiche Weise, daß dann A sich zusammensetzt aus mindestens zu $\sin(p g_1) \sin(p g_i)$, $\beta q \sin(p g_1)$, $\beta q \sin(p g_i)$ oder q^2 proportionalen Ausdrücken.

Fast man diese Ergebnisse zusammen und berücksichtigt, daß für B dasselbe gilt, so findet man, daß für jeden fast = 0 werdenden Nenner im Zähler eine Proportionalität zu βq oder $\sin(p g_i)$, $i = 1, 2$ oder 3 auftritt. Prüft man daraufhin die Spuren in der Hinsicht durch, ob sie bei der Winkelintegration über $d\Omega_1 d\Omega_2$

einen zu $\log^2 \frac{1}{q}$ proportionalen Anteil geben können, so findet man, daß das nur auftreten kann, wenn alle vier Nennerfaktoren fast = 0 werden. Das tritt ein, wenn zugleich g_1 und g_i parallel oder fast parallel zu p , g_3 und g_k antiparallel oder fast antiparallel zu p sind. Das wiederum ist nur möglich für die symmetrische Spur mit $k = 3$, $j = 2$, $i = 1$ und für die Spur mit $k = 2$, $j = 3$, $i = 1$.

Anhang II. Die symmetrische Spur

In (37) setzen wir $i = 1$ und werten diesen Ausdruck noch exakt aus zu

$$A = 2(\varepsilon g_1 - p g_1)(g_1 + \alpha g_1 - 2(p e_1) \alpha_1) + 4(p e_1)^2 (\varepsilon - g_1 - \alpha g_1 + \alpha p + \beta m c). \quad (38)$$

Da die beiden Faktoren $\varepsilon g_1 - p g_1$ und $(p e_1)^2$ zu $\sin^2(p g_1)$ proportional sind, setzen wir für die anderen Faktoren die Werte ein, die sie für die exakte Parallelage: $g_1 \parallel p$ annehmen und erhalten unter Berücksichtigung von $\varepsilon \approx p$

$$A = \{2(\varepsilon g_1 - p g_1) g_1 + 4(p e_1)^2 (\varepsilon - g_1)\} (1 + \alpha_2). \quad (38)$$

Für B erhält man entsprechend

$$B = \{2(\varepsilon g_3 + p g_3) g_3 + 4(p e_3)^2 (\varepsilon - g_3)\} (1 - \alpha_2).$$

Die Spur ergibt sich unter Berücksichtigung der in der Parallellage eintretenden Antikommutativität von α_z und α_x zu

$$\text{Spur } \alpha_z B \alpha_z A = 32 \{ (\varepsilon g_1 - p g_1) g_1 + 2 (p e_1)^2 (\varepsilon - g_1) \} \\ \cdot \{ (\varepsilon g_3 + p g_3) g_3 + 2 (p e_3)^2 (\varepsilon - g_3) \}.$$

Da in der Parallellage auf Grund des Energiesatzes $g_1 = \varepsilon$ sein muß, vereinfacht sich das zu

$$\text{Spur } \alpha_z B \alpha_z A = 32 \varepsilon (\varepsilon g_1 - p g_1) \{ (\varepsilon g_3 + p g_3) g_3 + 2 (p e_3)^2 (\varepsilon - g_3) \}.$$

Anbringung der zugehörigen Nennerfaktoren und Summierung über e_1, e_2, e_3 ergibt schließlich

$$256 \frac{\varepsilon}{\varepsilon g_1 - p g_1} \left[\frac{g_3}{\varepsilon g_3 + p g_3} + \frac{p^2 (\varepsilon - g_3) \sin^2 (p g_3)}{(\varepsilon g_3 + p g_3)^2} \right] \\ \text{oder} \\ 256 \frac{1}{\varepsilon - p \cos (p g_1)} \left[\frac{1}{\varepsilon + p \cos (p g_3)} + \frac{p^2 (\varepsilon - g_3) \sin^2 (p g_3)}{g_3^2 (\varepsilon + p \cos (p g_3))^2} \right]. \quad (39)$$

Anhang III. Die Spur $k=2, j=3, i=1$

Wir gehen von (34) bis (38) aus. Für A erhält man denselben Wert wie in Anhang II, also nach (38) unter Berücksichtigung von $\varepsilon \approx g_1$

$$A = 2 \varepsilon (\varepsilon g_1 - p g_1) (1 + \alpha_z), \quad (40)$$

für B erhält man entsprechend (37)

$$B = \{ 2 (p e_3) + (g_3 + \alpha g_3) \alpha_z \} (\varepsilon - \alpha p - \beta m c) \{ \alpha_z (g_2 + \alpha g_2) + 2 (p e_2) \}. \quad (41)$$

Wir setzen, um die Verhältnisse in der Nachbarschaft der speziellen Lage g_2 und g_3 antiparallel zu p zu erfassen

$$\alpha g_3 = \alpha_z g_{3z} + \alpha h_3 \quad \alpha g_2 = \alpha_z g_{2z} + \alpha h_2 \quad \alpha_3 = \alpha e_{3s} + \alpha_z f_3 \quad \alpha_2 = \alpha e_{2s} + \alpha_z f_2 \\ g_3 + g_{3z} = \delta_3 \quad g_2 + g_{2z} = \delta_2 \quad \varepsilon - p = \delta \quad z\text{-Richtung} = p\text{-Richtung}$$

wo e_{2s}, e_{3s} die zur z -Richtung senkrechten Komponenten von e_2, e_3 sind. Dabei sind h_3, f_3 proportional zu $\sin (p g_3)$, δ_3 proportional zu $\sin^2 (p g_3)$ usw. Weiter kann man in (41) $\beta m c$ streichen, da es keinen Beitrag zur Spur geben kann, nachdem A (s. (40)) β -frei geworden ist. Man erhält unter Streichen von $\sin^3 (p g_2)$ oder $\sin^3 (p g_3)$ proportionalen Ausdrücken

$$B = \{ 2 (p e_3) + g_3 (1 - \alpha_z) (\alpha e_{3s} + \alpha_z f_3) + \delta_3 \alpha_z (\alpha e_{3s} + \alpha_z f_3) \} \\ \cdot \{ \delta + p (1 - \alpha_z) \} \\ \cdot \{ 2 (p e_2) + g_2 (\alpha e_{2s} + \alpha_z f_2) (1 - \alpha_z) + \delta_2 (\alpha e_{2s} + \alpha_z f_2) + (\alpha e_{2s} + \alpha_z f_2) \alpha h_2 \}$$

oder, wieder unter Weglassen von allen mehr als in zweiter Ordnung kleinen Ausdrücken und Berücksichtigung der Antikommutativität von α_z mit $\alpha e_{2s}, \alpha e_{3s}, \alpha h_2, \alpha h_3$

$$B = 2 \delta g_2 g_3 \alpha e_{3s} \alpha e_{2s} (1 - \alpha_z) + (2 p e_3 - 2 g_3 f_3 + \alpha h_3 \alpha e_{3s}) \\ \cdot (2 p e_2 - 2 g_2 f_2 + \alpha e_{2s} \alpha h_2) p (1 - \alpha_z).$$

B ist jetzt in zweiter Ordnung klein, also brauchen wir bei der Bildung von $\alpha_2 B \alpha_3$ nur $\alpha_2 = \alpha e_{2s}$, $\alpha_3 = \alpha e_{3s}$ zu setzen und erhalten

$$\alpha_2 B \alpha_3 = \left[2 \frac{\delta}{p} g_2 g_3 \alpha e_{2s} \alpha e_{3s} \alpha e_{2s} \alpha e_{3s} + 4 (p e_3 - g_3 f_3) (p e_2 - g_2 f_2) \alpha e_{2s} \alpha e_{3s} \right. \\ \left. + 2 (p e_3 - g_3 f_3) \alpha h_2 \alpha e_{3s} + 2 (p e_2 - g_2 f_2) \alpha e_{2s} \alpha h_3 \right. \\ \left. + \alpha e_{2s} \alpha h_3 \alpha e_{3s} \alpha e_{2s} \alpha h_2 \alpha e_{3s} \right] p (1 + \alpha_2).$$

Für $\alpha_2 B \alpha_3 A$ ergibt sich unter gleichzeitiger Spurbildung

$$\text{Spur } \alpha_2 B \alpha_3 A = 16 \varepsilon p (\varepsilon g_1 - p g_1) \left[2 \frac{\delta}{p} g_2 g_3 (2 (e_{2s} e_{3s})^2 - 1) \right. \\ \left. + 4 (p e_3 - g_3 f_3) (p e_2 - g_2 f_2) (e_{2s} e_{3s}) \right. \\ \left. + 2 (p e_3 - g_3 f_3) (h_2 e_{3s}) + 2 (p e_2 - g_2 f_2) (h_3 e_{2s}) + (h_2 h_3) (e_{2s} e_{3s})^2 \right. \\ \left. + (h_2 e_{2s}) (h_3 e_{2s}) + (h_2 e_{3s}) (h_3 e_{3s}) - (h_2 e_{3s}) (h_3 e_{2s}) (e_{2s} e_{3s}) \right. \\ \left. - (h_2 e_{2s}) (h_3 e_{3s}) (e_{2s} e_{2s}) \right].$$

Die Summation über die Polarisationsrichtungen ergibt ($\vartheta_2, \vartheta_3, \varphi_2, \varphi_3$ polare und azimutale Winkel der g_2, g_3 -Richtung — p -Richtung als Achse)

$$\sum_{\varepsilon_1} \sum_{\varepsilon_2} \sum_{\varepsilon_3} \text{Spur } \alpha_2 B \alpha_3 A = 128 \varepsilon p^3 (\varepsilon g_1 - p g_1) \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \cos (\varphi_2 - \varphi_3).$$

Nach Anbringen der zugehörigen Nennerfaktoren ergibt sich, wenn wir berücksichtigen, daß in der Nachbarschaft der speziellen Lage $\varepsilon \approx p \approx g_1, g_2 \approx \varepsilon - g_3$ ist

$$\frac{\sum_{\varepsilon_1} \sum_{\varepsilon_2} \sum_{\varepsilon_3} \text{Spur } \alpha_2 B \alpha_3 A}{g_1^2 g_2 g_3 (\varepsilon - p \cos (p g_1))^2 (\varepsilon + p \cos (p g_2)) (\varepsilon + p \cos (p g_3))} \\ = \frac{128 p^3}{g_2 (\varepsilon - g_3) \varepsilon - p \cos (p g_1)} \frac{1}{(\varepsilon + p \cos (p g_2)) (\varepsilon + p \cos (p g_3))} \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \cos (\varphi_2 - \varphi_3) \quad (42)$$

Anhang IV. Die Raumwinkelintegration für die Spur $k=2, j=2, i=1$

Nach (29) ist zu bilden

$$J = \frac{1}{2} \frac{p^3}{g_3 (\varepsilon - g_3)} \iiint d\Omega_1 d\Omega_3 \frac{\sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \cos (\varphi_2 - \varphi_3)}{(\varepsilon - p \cos (p g_1)) (\varepsilon + p \cos (p g_2)) (\varepsilon + p \cos (p g_3))}.$$

Wir drücken den Integranden durch $\vartheta_1, \vartheta_3, \varphi_1$ und φ_3 aus und zählen dabei jetzt ϑ_1 und ϑ_3 so, daß sie in der speziellen Lage selbst = 0 sind. Aus Energie- und Impulssatz folgt für die Nachbarschaft dieser Lage mit $q = \frac{mc}{p}$

$$\varepsilon + p \cos (p g_2) = \frac{p}{2} \frac{1}{(\varepsilon - g_3)^2} \cdot \{ q^2 (\varepsilon - g_3)^2 + p^2 \vartheta_1^2 + g_3^2 \vartheta_3^2 - 2 p g_3 \vartheta_1 \vartheta_3 \cos (\varphi_1 - \varphi_3) \}$$

$$\sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \cos (\varphi_2 - \varphi_3) = - \frac{1}{\varepsilon - g_3} (g_3 \vartheta_3^2 - p \vartheta_1 \vartheta_3 \cos (\varphi_1 - \varphi_3)).$$

Außerdem schreiben wir natürlich wieder

$$\varepsilon - p \cos(\varphi \vartheta_1) = \frac{p}{2} (q^2 + \vartheta_1^2) \quad \varepsilon + p \cos(\varphi \vartheta_3) = \frac{p}{2} (q^2 + \vartheta_3^2)$$

und bekommen

$$J = -\frac{1}{2} \frac{p^3}{g_3 (\varepsilon - g_3)} \frac{1}{\varepsilon - g_3 p^3} (\varepsilon - g_3)^2 \cdot \iiint d\Omega_1 d\Omega_3 \frac{g_3 \vartheta_3^2 - p \vartheta_1 \vartheta_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3)}{(q^2 + \vartheta_1^2)(q^2 + \vartheta_3^2) \{q^2 (\varepsilon - g_3)^2 + p^2 \vartheta_1^2 + g_3^2 \vartheta_3^2 - 2 p g_3 \vartheta_1 \vartheta_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3)\}}$$

oder nach leichter Umformung und Durchführung der Integration über die azimutalen Winkel

$$J = -\frac{8\pi^2}{g_3^2} \int_0^1 \vartheta_1 d\vartheta_1 \int_0^1 \vartheta_3 d\vartheta_3 \frac{1}{(q^2 + \vartheta_1^2)(q^2 + \vartheta_3^2)} \cdot \left[1 - \frac{p^2 \vartheta_1^2 - g_3^2 \vartheta_3^2 + q^2 (\varepsilon - g_3)^2}{\sqrt{\{q^2 (\varepsilon - g_3)^2 + p^2 \vartheta_1^2 + g_3^2 \vartheta_3^2\}^2 - 4 p^2 g_3^2 \vartheta_1^2 \vartheta_3^2}} \right],$$

wobei die Integration nur über die Nachbarschaft der speziellen Lage durch die Integrationsgrenzen 0 bis ungefähr 1 ausgedrückt sei. Die eckige Klammer ist

$$[\dots] \approx_2^0 \text{ für } p \vartheta_1 > g_3 \vartheta_3. \quad (43)$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} J &= -\frac{8\pi^2}{g_3^2} \int_0^1 \vartheta_3 d\vartheta_3 \int_0^{\approx \frac{g_3^2 \vartheta_3}{p}} \vartheta_1 d\vartheta_1 \frac{2}{(q^2 + \vartheta_1^2)(q^2 + \vartheta_3^2)} \\ &= -\frac{4\pi^2}{g_3^2} \int_0^1 dx \int_0^{\approx \frac{g_3^2}{p^2} x} dy \frac{1}{(q^2 + x)(q^2 + y)} = -\frac{4\pi^2}{g_3^2} \int_0^1 dx \frac{1}{q^2 + x} \log \frac{q^2 + \frac{g_3^2}{p^2} x}{q^2} \\ &= -\frac{4\pi^2}{g_3^2} \left\{ 2 \log^2 \frac{1}{q} + \text{Terme, die nur einem } \log \frac{1}{q} \text{ prop. sind} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (44)$$

Die Fehler, die die Vereinfachung (43) mit sich bringt, sind ohne Einfluß auf das Ergebnis (44), weil sie nur in einem Gebiet $\Delta \vartheta_1 \Delta \vartheta_3$ der Größenordnung q^2 auftreten. Es ist also unter Vernachlässigung aller nicht zu $\log^2 \frac{1}{q}$ proportionalen Termen

$$J = -\frac{8\pi^2}{g_3^2} \log^2 \frac{1}{q} = -\frac{8\pi^2}{g_3^2} \log^2 \frac{p}{mc}. \quad (45)$$

Leipzig, Institut für theoretische Physik der Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 28. Dezember 1948.)

Über die Berechnung des Schallfeldes von kreisförmigen Membranen in starrer Wand

Von H. Stenzel

(Mit 3 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Zur Bestimmung der für den Schalldruck im Aufpunkt (r, γ) charakteristischen Funktion $\Re(r, \gamma)$ werden die speziellen Funktionen $\Re(\infty, \gamma)$ (Aufpunkt im Unendlichen) und $\Re(r, 0)$ (Aufpunkt auf der Mittelachse) eingeführt. Mit Hilfe der Differentialgleichung für die Legendreschen Kugelfunktionen $P_n(z)$ wird gezeigt, daß die Koeffizienten der nach fallenden Potenzen von r fortschreitenden Reihe von $\Re(r, \gamma)$ durch eine auf die Funktion $\Re(\infty, \gamma)$ ausgeübte Differentialoperation gegeben sind. Ist insbesondere $\Re(\infty, \gamma)$ als Potenzreihe von z ($z = \cos \gamma$) gegeben, so wird $\Re(r, \gamma)$ ebenfalls durch eine Reihe dargestellt, die nach Potenzen von $\cos \gamma$ fortschreitet.

In analoger Weise ergibt sich mit Hilfe der Differentialgleichung der Rayleighschen Funktion $f_n(ikr)$ die Bestimmung der Koeffizienten der nach Potenzen von $\sin \gamma$ fortschreitenden Reihe von $\Re(r, \gamma)$ durch eine auf die Funktion $\Re(r, 0)$ ausgeübte Differentialoperation.

Die Tragweite der abgeleiteten Formeln wird an Hand von Beispielen für die Kolbenmembran erläutert.

1. Die Formulierung der Aufgabe

Ausgehend von der Rayleighschen Fundamentalformel für das Geschwindigkeitspotential φ einer in starrer Wand schwingenden Membran:

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} \int_F \frac{d\varphi}{dn} \frac{e^{i\kappa R}}{R} dF$$

wollen wir mit: $\frac{d\varphi}{dn} = w(\varrho) e^{-i\omega t}$ den im Aufpunkt A vorhandenen Schalldruck $p = i\kappa\sigma\varphi$ in der Form darstellen:

$$p = \frac{2\pi\kappa\sigma F w_m e^{-i(\omega t + \pi/2 - \kappa r)}}{\kappa r} \frac{1}{w_m F} \int_F \frac{e^{-i\kappa(r-R)}}{R/r} w(\varrho) dF. \quad (1)$$

Dabei ist Rotationssymmetrie für die schwingende Membran vorausgesetzt, so daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit den Aufpunkt in der YZ -Ebene des Koordinatensystems annehmen können, dessen Mittelpunkt O mit dem Membranmittelpunkt zusammenfällt, während die Membranebene in der XY -Ebene liegt (s. Abb. 1).

Ferner bedeutet:

σ	der Schallwiderstand des Mediums
$F = \pi a^2$	die strahlende Kreisfläche mit dem Radius a .
$\kappa = 2\pi/\lambda$	die zur Wellenlänge λ gehörende Wellenzahl
$e^{-i\omega t}$	der Zeitfaktor der fortschreitenden Welle
ϱ, γ	die Koordinaten des Strahlerelementes dF in der XY -Ebene
$w(\varrho)$	die Membranschnelle für das Strahlerelement dF
$w_m = \frac{2\pi}{F} \int_0^a w(\varrho) \varrho d\varrho$	die mittlere Membranschnelle
R	der Abstand des Aufpunktes A vom Strahlerelement dF
r, γ	die Koordinaten des Aufpunktes in der YZ -Ebene
$\Re = \Re(r, \gamma)$	die zu beliebigem $w(\varrho)$ gehörende charakteristische Funktion des Aufpunktes (r, γ)
$\Re^{[p]} = \Re^{[p]}(r, \gamma)$	die zu $w(\varrho) = (1 - \varrho^2/a^2)^{p-1}$ gehörende charakteristische Funktion des Aufpunktes (r, γ).

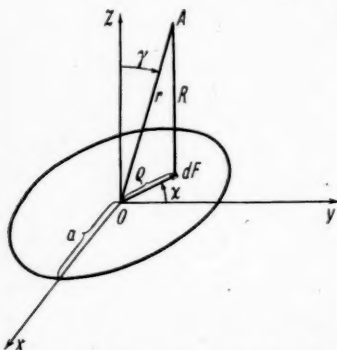


Abb. 1. Zur Berechnung des Schallfeldes der kreisförmigen Membran

Wir definieren die relativen (dimensionslosen) Druckkomponenten p_a und p_m durch:

$$p = c \sigma w_m e^{-i\omega t} (p_a + i p_m)$$

und erhalten dann:

$$p_a + i p_m = \frac{-i e^{i\kappa r}}{\kappa r} \frac{(\kappa a)^2}{2} \Re \quad (2)$$

mit:

$$\Re = \frac{1}{w_m F} \int_F \frac{e^{-i\kappa(R-r)}}{R/r} w(\varrho) dF. \quad (3)$$

Unsere Aufgabe soll es dann sein, für \Re Reihenentwicklungen anzugeben, die insbesondere für große κr eine praktische Berechnung von $\Re(r, \gamma)$ bzw. $p_a + i p_m$ ermöglichen.

Nun ergibt sich aus der allgemeinen Theorie¹⁾, daß für Aufpunkte, deren Abstand vom Membranmittelpunkt größer als der Membranradius ist, — nur solche Aufpunkte sollen im Folgenden betrachtet werden — das Geschwindigkeitspotential φ durch die nach Kugelfunktionen fortschreitende, absolut und gleichmäßig konvergente, Reihe dargestellt werden kann:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\omega t} \frac{a_{2n}(\kappa a)}{\sqrt{\kappa r}} H_{2n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\kappa r) P_{2n}(\cos \gamma). \quad (4)$$

¹⁾ H. Backhaus, Ann. Physik 5, 3 (1930). Da wir nach Sommerfeld $e^{-i\omega t}$ als Zeitfaktor verwenden im Gegensatz zu $e^{+i\omega t}$ bei Backhaus und Rayleigh, müssen wir in (4) $H_{2n+\frac{1}{2}}^{(1)}$ (an Stelle $H_{2n+\frac{1}{2}}^{(2)}$ bei Backhaus) schreiben. Aus demselben Grund ist auf der rechten Seite von (6) in der Rayleighschen Definition $+i\kappa r$ durch $-i\kappa r$ ersetzt.

An Stelle der Hankelschen Funktion $H_{m+\frac{1}{2}}^{(1)}(\kappa r)$ führen wir durch die Beziehung²⁾

$$\sqrt{\frac{\pi \kappa r}{2}} H_{m+\frac{1}{2}}^{(1)}(\kappa r) = (-i)^{m+1} e^{i\kappa r} f_m(i\kappa r) = S_m(\kappa r) - i C_m(\kappa r) \quad (5)$$

die von Rayleigh³⁾ benutzte Funktion ein:

$$f_m(i\kappa r) = 1 + i \frac{m(m+1)}{2\kappa r} + i^2 \frac{(m-1)m(m+1)(m+2)}{2 \cdot 4 (\kappa r)^2} + \dots \\ + i^m \frac{(2m)!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m (\kappa r)^m} \quad (6)$$

und erhalten dann für $\Re(r, \gamma)$ die folgende Darstellung:

$$\Re(r, \gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}(\kappa a) f_{2n}(i\kappa r) P_{2n}(\cos \gamma). \quad (7)$$

Bekanntlich⁴⁾ läßt sich für die Kolbenmembran ($w(\varrho) = 1$) die Funktion $\Re(r, \gamma)$, wenn $\gamma = 0$ oder $r = \infty$ ist (d. h. der Aufpunkt auf der Mittelachse oder im Unendlichen liegt), sehr einfach durch direkte Auswertung des Integrals in (3) finden. Das gilt auch für allgemeinere Schwingungstypen $w(\varrho) = (1 - \varrho^2/a^2)^{p-1}$, wie wir im nächsten Abschnitt erläutern werden. Wir können deshalb die entsprechenden Funktionen $\Re(r, 0)$ und $\Re(r, \gamma)$ als bekannt ansehen. Für die Kolbenmembran ergibt sich für großes r wegen $\Re(\infty, \gamma) = \frac{2 J_1(\kappa a \sin \gamma)}{\kappa a \sin \gamma}$ aus (2) die bekannte Näherung:

$$p_a^* + i p_m^* = \frac{-i e^{i\kappa r}}{\kappa r} \frac{(\kappa a)^2}{2} \frac{2 J_1(\kappa a \sin \gamma)}{\kappa a \sin \gamma}. \quad (2)$$

Es liegt dann nahe, nach einer allgemeinen Reihenentwicklung von $\Re(r, \gamma)$ zu fragen, bei der das erste Glied durch $\Re(r, 0)$ bzw. durch $\Re(\infty, \gamma)$ gegeben ist. Wir werden damit auf Reihen für $\Re(r, \gamma)$ geführt, die nach steigenden Potenzen von $\sin \gamma$ oder von $\cos \gamma$ bzw. nach fallenden Potenzen von r fortschreiten, und stellen uns die Aufgabe, die Koeffizienten dieser Reihen zu bestimmen⁵⁾.

Das Hauptergebnis der Arbeit besteht dann in dem Nachweis, daß die gesuchten Koeffizienten sich unmittelbar durch Differentialoperationen, die auf $\Re(\infty, \gamma)$

²⁾ W. Magnus u. F. Oberhettinger, Formeln und Sätze . . . , 2. Aufl. Berlin, Springer 1943, S. 32.

³⁾ Lord Rayleigh, Theory of Sound, London, 1929, § 323.

⁴⁾ H. Backhaus u. F. Trendelenburg, Z. techn. Physik 7, 630 (1926); H. Stenzel, E.N.T. 4, 251 (1927).

⁵⁾ In ähnlicher Weise wird in der Arbeit: A. O. Williams and L. W. Labaw, Acoustic Intensity and Distribution from a Piston Source [Acoust. Soc. of America, Vol. 16, 231 (1945)] eine Näherungsformel für Aufpunkte, die in der Nähe der Mittelachse und in großer Entfernung liegen, abgeleitet, doch ist das Ergebnis für den absoluten Schalldruck:

$$|p_a + i p_m| = 2 \sin \frac{\kappa a^2}{4z} \left(1 - \frac{a^2 \kappa^2}{8z^2} r^2 \right)$$

wenig befriedigend, da es wegen $r/z = \tan \gamma \sim \sin \gamma$ sich praktisch von der bekannten obigen Näherung:

$$|p_a^* + i p_m^*| = \frac{(\kappa a)^2}{2 \kappa r} \frac{2 J_1(\kappa a \sin \gamma)}{\kappa a \sin \gamma} = \frac{\kappa a^2}{2r} \left(1 - \frac{a^2 \kappa^2}{8} \sin^2 \gamma + \dots \right)$$

kaum unterscheidet.

bzw. auf $\Re(r, \varphi)$ auszuführen sind, bestimmen lassen. Bevor wir diesen Nachweis führen, sollen im folgenden Abschnitt die für $\Re(\infty, \gamma)$ und $\Re(r, \varphi)$ geltenden Entwicklungen zusammengestellt werden.

2. Die Darstellung der Funktionen $\Re(\infty, \gamma)$ und $\Re(r, \varphi)$

Mit Hilfe der Besselschen Funktion nullter Ordnung:

$$J_0(\kappa \varrho \sin \gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\kappa \varrho \sin \gamma \cos \varphi} d\varphi$$

geht für $r = \infty$ die Formel (3) über in:

$$\Re(\infty, \gamma) = \frac{2\pi}{w_m F} \int_0^a J_0(\kappa \varrho \sin \gamma) \cdot w(\varrho) \varrho d\varrho. \quad (8)$$

Setzen wir für $J_0(\kappa \varrho \sin \gamma)$ die bekannte Reihe ein, welche nach Besselschen Funktionen höherer Ordnung $J_m(\kappa \varrho)$ und nach Potenzen von z ($z = \cos \varphi$) fortschreitet ⁶⁾:

$$J_0(\kappa \varrho \sin \gamma) = J_0(\kappa \varrho) + \kappa \varrho J_1(\kappa \varrho) \frac{z^2}{2 \cdot 1!} + (\kappa \varrho)^2 J_2(\kappa \varrho) \frac{z^4}{2^2 \cdot 2!} + \dots, \quad (9)$$

so folgt:

$$\Re(\infty, \gamma) = B_0 + B_1 z^2 + B_2 z^4 + \dots, \quad (10)$$

wobei B_m durch:

$$m! 2^m B_m = \frac{2\pi}{w_m F} \int_0^a J_m(\kappa \varrho) w(\varrho) \varrho d\varrho \quad (11)$$

definiert ist.

Bezeichnen wir in (3) die zu $w(\varrho) = (1 - \varrho^2/a^2)^{p-1}$ gehörende Funktion mit $\Re^{[p]}(r, \gamma)$, so ist:

$$\Re^{[p]}(\infty, \gamma) = 2^p p! \frac{J_p(\kappa a \sin \gamma)}{(\kappa a \sin \gamma)^p}. \quad (12)$$

Daraus folgen die beiden Darstellungen:

$$\Re^{[p]}(\infty, \gamma) = \frac{2^p p!}{(\kappa a)^p} \left\{ J_p(\kappa a) + J_{p+1}(\kappa a) \frac{z^2(\kappa a)}{2 \cdot 1!} + J_{p+2}(\kappa a) \frac{z^4(\kappa a)^2}{2^2 \cdot 2!} + \dots \right\} \quad (13)$$

$$\Re^{[p]}(\infty, \gamma) = 1 - \frac{(\kappa a)^2 \sin^2 \gamma}{2^2 \cdot 1! (p+1)} + \frac{(\kappa a)^4 \sin^4 \gamma}{2^4 \cdot 2! (p+1)(p+2)} - \dots \quad (14)$$

Für $\gamma = 0$ geht die Formel (3) über in:

$$\Re(r, \varphi) = \frac{2\pi r e^{-i\kappa r}}{w_m F} \int_0^a \frac{e^{i\kappa \sqrt{r^2 + \varrho^2}}}{\sqrt{r^2 + \varrho^2}} w(\varrho) \varrho d\varrho. \quad (15)$$

⁶⁾ Watson, Theory of Bessel Functions, Cambridge 1929, S. 141.

⁷⁾ H. Stenzel, Ann. Physik 7, 972 (1930).

⁸⁾ G. N. Watson, Theory of Bessel Functions, Cambridge 1929, S. 141, dabei ist $\sqrt{1+k} = \sqrt{1-\cos^2 \gamma} = \sin \gamma$ zusetzen.

Für die Kolbenmembran $w(\varrho) = 1$ folgt daraus:

$$\Re^{(1)}(r, \varrho) = -\frac{2 i \kappa r}{(\kappa a)^2} e^{-i \kappa r} [e^{i \kappa \sqrt{r^2 + a^2}} - e^{i \kappa r}] \quad (16)$$

Für beliebiges $w(\varrho)$ benutzen wir zur Auswertung des Integrales (15) die Beziehung¹⁰⁾:

$$\frac{r e^{-i \kappa r} e^{i \kappa \sqrt{r^2 + \varrho^2}}}{\sqrt{r^2 + \varrho^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n (\kappa \varrho)^{2n} f_n(i \kappa r)}{2^n n! (\kappa r)^n} \quad (17)$$

Setzen wir dies in (15) ein, so folgt:

$$\Re(r, \varrho) = 1 + \varepsilon_1 \frac{i f_1(i \kappa r)}{2 \kappa r} + \varepsilon_2 \frac{i^2 f_2(i \kappa r)}{(2 \kappa r)^2} + \dots \quad (18)$$

mit:

$$\varepsilon_n = \frac{2\pi}{\kappa_m F} \frac{1}{n!} \int_0^a (\kappa \varrho)^{2n} w(\varrho) \varrho d\varrho \quad (19)$$

Ist speziell $w(\varrho) = (1 - \varrho^2/a^2)^{p-1}$, so ergibt sich: $\varepsilon_n = \frac{(\kappa a)^{2n}}{(p+1)(p+2)\dots(p+n)}$ und es folgt:

$$\Re^{(p)}(r, \varrho) = 1 + \frac{(\kappa a)^2 i f_1(i \kappa r)}{p+1} \frac{1}{2 \kappa r} + \frac{(\kappa a)^4}{(p+1)(p+2)} \frac{i^2 f_2(i \kappa r)}{(2 \kappa r)^2} + \dots \quad (20)$$

3. Die Darstellung von $\Re(r, \gamma)$ mit Hilfe von $\Re(\infty, \gamma)$ nach fallenden Potenzen von κr

a) Die Darstellung der Entwicklungskoeffizienten durch einen Differentialoperator

Setzen wir für $f_{2n}(i \kappa r)$ die sich aus (6) ergebende Reihe in (7) ein, so können wir $\Re(r, \gamma)$ in der Form schreiben:

$$\Re(r, \gamma) = \mathfrak{S}_0(z) + \frac{i \mathfrak{S}_1(z)}{2 \kappa r} + \frac{i^2 \mathfrak{S}_2(z)}{2 \cdot 4 (\kappa r)^2} + \dots \quad (21)$$

Dabei ist:

$$\mathfrak{S}_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}(\kappa a) \frac{(2n+m)!}{(2n-m)!} P_{2n}(z) \quad (22)$$

und insbesondere:

$$\mathfrak{S}_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}(\kappa a) P_{2n}(z) = \Re(\infty, \gamma) \quad (23)$$

Wir zeigen zunächst, wie wir den zweiten Koeffizienten in (21):

$$\mathfrak{S}_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}(\kappa a) 2n(2n+1) P_{2n}(z) \quad (24)$$

⁹⁾ H. Backhaus u. F. Trendelenburg, Z. techn. Physik 7, 630 (1926).

¹⁰⁾ H. Stenzel, Ann. Physik 41, 253 (1942). Dies ergibt sich aus der Formel (43), wenn man darin $\kappa \varrho$ durch κr und $-(\kappa a)^2 \sin^2 \varphi$ durch $(\kappa \varrho)^2$ ersetzt und die Beziehung:

$$C_m(\kappa r) + i S_m(\kappa r) = (-i)^m e^{i \kappa r} f_m(i \kappa r)$$

berücksichtigt.

durch $\mathfrak{S}_0(z)$ bestimmen können. Dazu benutzen wir die bekannte Differentialgleichung der Kugelfunktionen:

$$\frac{d}{dz} \left\{ (z^2 - 1) \frac{dP_n(z)}{dz} \right\} = n(n+1) P_n(z). \quad (25)$$

Den auf der linken Seite von (25) stehenden Ausdruck fassen wir als Operator D_1 von P_n auf und schreiben:

$$D_1 [P_n] = \frac{d}{dz} \left\{ (z^2 - 1) \frac{dP_n}{dz} \right\}.$$

Wenden wir dann die Operation:

$$D_1 [P_{2n}] = 2n(2n+1) P_{2n}(z)$$

auf beide Seiten der Gleichung (23) an, so folgt:

$$D_1 [\mathfrak{S}_0(z)] = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}(\kappa a) 2n(2n+1) P_{2n}(z).$$

Das heißt, es ist nach (24):

$$\mathfrak{S}_1(z) = \frac{d}{dz} \left\{ (z^2 - 1) \frac{d\mathfrak{S}_0(z)}{dz} \right\}. \quad (26)$$

Legen wir z. B. die Kolbenmembran ($p=1$, $w(\varrho)=1$) zugrunde, so folgt aus:

$$\Re^{[1]}(\infty, \gamma) = \mathfrak{S}_0(z) = \frac{2 J_0(\kappa a \sqrt{1-z^2})}{\kappa a \sqrt{1-z^2}}$$

durch Differentiation

$$(z^2 - 1) \frac{d\mathfrak{S}_0(z)}{dz} = -2z J_2(\kappa a \sqrt{1-z^2})$$

und daraus mit der Abkürzung $\kappa a \sqrt{1-z^2} = \kappa a \sin \gamma = u$

$$\mathfrak{S}_1(z) = \frac{2(1+z^2) J_2(u) - 2z^2 u J_1(u)}{1-z^2}.$$

Um $\mathfrak{S}_2(z)$, $\mathfrak{S}_3(z)$ usw. zu finden, definieren wir die Operatoren:

$$\begin{aligned} D_2 [P_n] &= D_1 [D_1 [P_n]] & - & & 1 \cdot 2 D_1 [P_n] \\ D_3 [P_n] &= D_1 [D_2 [P_n]] & - & & 2 \cdot 3 D_2 [P_n] \\ &\vdots & & & \vdots \\ D_m [P_n] &= D_1 [D_{m-1} [P_n]] & - & & m(m-1) D_{m-1} [P_n]. \end{aligned} \quad (27)$$

Dann ist, wegen $n(n+1) - 1 \cdot 2 = (n-1)(n+2)$,
 $n(n+1) - 2 \cdot 3 = (n-2)(n+3)$

$$D_2 [P_n] = (n-1)n(n+1) P_n = \frac{(n+2)!}{(n-2)!} P_n$$

$$D_3 [P_n] = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3) P_n = \frac{(n+3)!}{(n-3)!} P_n$$

und wir können $\mathfrak{S}_2(z)$, $\mathfrak{S}_3(z)$ usw. analog wie $\mathfrak{S}_1(z)$ bestimmen. Um dazu die Operation $D_2 [P_n]$ auszuführen, setzen wir:

$$g_1(z) = (z^2 - 1) \frac{dP_n}{dz}$$

$$g_2(z) = (z^2 - 1)^2 \frac{d^2 P_n}{dz^2}$$

dann ist:

$$\begin{aligned}(z^2 - 1) g'_1 &= 2z g_1 + g_2 \\ (z^2 - 1) g'_1 &= 2g_1 + g'_2.\end{aligned}\quad (28)$$

Damit ergibt sich:

$$D_2 [P_n] = \frac{d}{dz} \{ (z^2 - 1) g'_1 \} - 2g'_1 = \frac{d}{dz} \{ (z^2 - 1) g'_1 - 2g_1 \} = g'_2.$$

Also ist:

$$D_2 [P_n] = \frac{d^2}{dz^2} \left\{ (z^2 - 1)^2 \frac{d^2 P_n}{dz^2} \right\}.$$

Wir behaupten, es gilt allgemein:

$$D_m [P_n] = \frac{d^m}{dz^m} \left\{ (z^2 - 1)^m \frac{d^m P_n}{dz^m} \right\} \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (29)$$

Zum Beweis setzen wir:

$$g_m(z) = (z^2 - 1)^m \frac{d^m P_n}{dz^m},$$

dann ist:

$$(z^2 - 1) g'_{m-1} = 2(m-1)z g_{m-1} + g_m.$$

Daraus folgt durch $(m-1)$ maliges Differenzieren die zu (28) analoge Gleichung:

$$(z^2 - 1) g^{(m)}_{m-1} = (m-1)m g^{(m-2)}_{m-1} + g^{(m)}_m$$

und schließlich durch nochmaliges Differenzieren:

$$\frac{d}{dz} \left\{ (z^2 - 1) \frac{d}{dz} g^{(m-1)}_{m-1} \right\} = (m-1)m g^{(m-1)}_{m-1} + g^{(m)}_m. \quad (30)$$

Nehmen wir nun an, daß (29) für $m-1$ bewiesen ist, d. h. daß:

$$D_{m-1} [P_n] = g^{(m-1)}_{m-1} \quad (31)$$

ist, so folgt wegen (27) aus (30):

$$D_m [P_n] = g^{(m)}_m.$$

Da (29) für $m=1$ und $m=2$ bewiesen ist, gilt (29) für beliebiges m .

Wir erhalten also:

$$\mathfrak{S}_m(z) = \frac{d^m}{dz^m} \left\{ (z^2 - 1)^m \frac{d^m \mathfrak{S}_0(z)}{dz^m} \right\}^{11).} \quad (32)$$

¹¹⁾ Diese Gleichung können wir wegen (29) auch in der Form schreiben:

$$\frac{d^m}{dz^m} \left\{ (z^2 - 1)^m \frac{d^m P_n}{dz^m} \right\} = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} P_n$$

und aus einer Beziehung der zugeordneten Kugelfunktionen:

$$P_n^{(m)}(x) = (-1)^m \frac{(n+m)!}{(n-m)!} (1-x^2)^{-m/2} \int_x^1 \dots \int_x^1 P_n(x) (dx)^m$$

direkt ableiten (s. W. Magnus u. F. Oberhettinger, Formeln u. Sätze, S. 75).

b) Die Darstellung von $\Re(r, \gamma)$ mit Hilfe der Potenzreihe $\Re(\infty, \gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^{2n}$

Wir gehen von der Reihenentwicklung (10) für $\Re(\infty, \gamma)$ aus und bekommen unter Anwendung von (32) die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_0(z) &= B_0 & + B_1 z^2 & + B_2 z^4 & + \dots \\ \mathfrak{E}_1(z) &= \frac{2!}{1!} B_1 [z(z^2-1)]' & + \frac{4!}{3!} B_2 [z^3(z^2-1)]' & + \frac{6!}{5!} B_3 [z^5(z^2-1)]' & + \dots \\ \mathfrak{E}_2(z) &= \frac{2!}{0!} B_1 [(z^2-1)^2]'' & + \frac{4!}{2!} B_2 [z^2(z^2-1)^2]'' & + \frac{6!}{4!} B_3 [z^4(z^2-1)^2]'' & + \dots \\ \mathfrak{E}_3(z) &= \frac{4!}{1!} B_2 [z(z^2-1)^3]''' & + \frac{6!}{3!} B_3 [z^3(z^2-1)^3]''' & + \frac{8!}{5!} B_4 [z^5(z^2-1)^3]''' & + \dots \\ \mathfrak{E}_4(z) &= \frac{4!}{0!} B_2 [(z^2-1)^4]^{(4)} & + \frac{6!}{2!} B_3 [z^2(z^2-1)^4]^{(4)} & + \frac{8!}{4!} B_4 [z^4(z^2-1)^4]^{(4)} & + \dots\end{aligned}$$

u. s. w.

Dann folgt aus (21):

$$\begin{aligned}\Re(r, \gamma) &= B_0 + B_1 \left\{ z^2 + i \frac{2!}{1! 2 \pi r} [z(z^2-1)]' + i^2 \frac{2!}{2 \cdot 4 (\pi r)^2} [(z^2-1)^2]'' \right\} \\ &+ B_2 \left\{ z^4 + i \frac{4!}{3! 2 \pi r} [z^3(z^2-1)]' + i^2 \frac{4!}{2! 2 \cdot 4 (\pi r)^2} [z^2(z^2-1)^2]'' + i^3 \frac{4!}{1! 2 \cdot 4 \cdot 6 (\pi r)^3} [z^4(z^2-1)^2]''' \right. \\ &\quad \left. + i^4 \frac{4!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 (\pi r)^4} [(z^2-1)^4]^{(4)} \right\} \\ &+ B_3 \left\{ z^6 + i \frac{6!}{5! 2 \pi r} [z^5(z^2-1)]' + i^2 \frac{6!}{4! 2 \cdot 4 (\pi r)^2} [z^4(z^2-1)^2]'' + i^3 \frac{6!}{3! 2 \cdot 4 \cdot 6 (\pi r)^3} [z^3(z^2-1)^3]''' \right. \\ &\quad \left. + i^4 \frac{6!}{2! 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 (\pi r)^4} [z^2(z^2-1)^4]^{(4)} + i^5 \frac{6!}{1! 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 (\pi r)^5} [z(z^2-1)^5]^{(5)} \right. \\ &\quad \left. + i^6 \frac{6!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 (\pi r)^6} [(z^2-1)^6]^{(6)} \right\} \\ &+ \dots\end{aligned}$$

Führen wir die Differentiation aus, so können wir unter Benutzung von (6) $\Re(r, \gamma)$ in folgender Weise übersichtlich darstellen:

$$\begin{aligned}\Re(r, \gamma) &= B_0 + B_1 \left\{ z^2 f_2(i \pi r) - i \frac{2!}{2 \pi r} f_1(i \pi r) \right\} \\ &+ B_2 \left\{ z^4 f_4(i \pi r) - i \frac{3 \cdot 4}{2 \pi r} z^2 f_3(i \pi r) + i^2 \frac{4!}{2 \cdot 4 (\pi r)^2} f_2(i \pi r) \right\} \\ &+ B_3 \left\{ z^6 f_6(i \pi r) - i \frac{5 \cdot 6}{2 \pi r} z^4 f_5(i \pi r) + i^2 \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 4 (\pi r)^2} z^2 f_4(i \pi r) \right. \\ &\quad \left. - i^3 \frac{6!}{2 \cdot 4 \cdot 6 (\pi r)^3} f_3(i \pi r) \right\} \\ &+ \dots\end{aligned} \quad (33)$$

Für den allgemeinen Beweis von (33) begnügen wir uns damit, die Übereinstimmung an dem zu B_2 gehörenden Faktor zu zeigen, da sich daraus unschwer

die allgemeine Richtigkeit erkennen läßt. Wir schreiben dazu die einzelnen Glieder nach Ausführung der Differentiation in geeigneter Form untereinander:

$$\begin{aligned}
 & \frac{4! [z^2(z^2-1)]'}{3! 2 (\kappa r)} = i \frac{z^4 \cdot 4 \cdot 5}{2 \kappa r} - i \frac{4 \cdot 3 \cdot z^2}{2 \kappa r} \\
 & \frac{4! [z^2(z^2-1)]''}{2! 2 \cdot 4 (\kappa r)^2} = i^2 \frac{z^4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 4 (\kappa r)^2} - i \frac{4 \cdot 3 \cdot z^2}{2 \kappa r} i \frac{3 \cdot 4}{2 \kappa r} + i^2 \frac{4!}{2 \cdot 4 (\kappa r)^2} \\
 & \frac{4! [z^2(z^2-1)]'''}{1! 2 \cdot 4 \cdot 6 (\kappa r)^3} = i^3 \frac{z^4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 (\kappa r)^3} - i \frac{4 \cdot 3 \cdot z^2}{2 \kappa r} i^2 \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 4 (\kappa r)^2} + i^2 \frac{4!}{2 \cdot 4 (\kappa r)^2} i \frac{2 \cdot 3}{2 \kappa r} \\
 & \frac{4! [(z^2-1)^{(4)}]}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 (\kappa r)^4} = i^4 \frac{z^4 \cdot 8!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 (\kappa r)^4} - i \frac{4 \cdot 3 \cdot z^2}{2 \kappa r} i^3 \frac{6!}{2 \cdot 4 \cdot 6 (\kappa r)^3} + i^2 \frac{4!}{2 \cdot 4 (\kappa r)^2} i^2 \frac{4!}{2 \cdot 4 (\kappa r)^2} \\
 & \Sigma = z^4 f_4(i \kappa r) - i \frac{3 \cdot 4 \cdot z^2}{2 \kappa r} f_3(i \kappa r) + i^2 \frac{4!}{2 \cdot 4 (\kappa r)^2} f_2(i \kappa r).
 \end{aligned}$$

Dabei ergibt sich durch Addition der einzelnen Kolonnen die behauptete Übereinstimmung.

Wir haben damit das allgemeine Ergebnis:

Die durch (7) definierte Funktion $\mathfrak{R}(r, \gamma)$ läßt sich unmittelbar aus der Potenzreihe von $\mathfrak{S}_0(z)$ ableiten, indem jede Potenz z^2 durch ein von κr und z abhängiges Polynom:

$$\begin{aligned}
 \Psi_{2n}(z) &= z^{2n} f_{2n}(i \kappa r) - i \frac{(2n-1) 2n z^{2n-2}}{\kappa r} f_{2n-1}(i \kappa r) \\
 &+ i^2 \frac{(2n-3)(2n-1) 2n z^{2n-4}}{2 \cdot 4 (\kappa r)^2} f_{2n-2}(i \kappa r) - \dots + (-i)^n \frac{(2n)!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n (\kappa r)^n} f_n(i \kappa r)
 \end{aligned} \quad (34)$$

ersetzt wird.

Gehen wir von der Kolbenmembran aus und benutzen dementsprechend die aus (13) für $p=1$ sich ergebende Reihe für $\mathfrak{S}_0(z)$:

$$\mathfrak{S}_0(z) = \frac{2}{\kappa a} \sum_{n=0}^{\infty} J_{n+1}(\kappa a) \frac{(\kappa a)^n z^{2n}}{2^n n!},$$

so können wir nach Potenzen von z ($z = \cos \gamma$) ordnen und bekommen aus (2) nach Einführung der Funktionen S_n und C_n aus (5):

$$\begin{aligned}
 p_a + i p_m &= \frac{a}{r} J_1(\kappa a) [S_0(\kappa r) - i C_0(\kappa r)] + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^2 J_2(\kappa a) [S_1(\kappa r) - i C_1(\kappa r)] \\
 &+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{a}{r}\right)^3 J_3(\kappa a) [S_2(\kappa r) - i C_2(\kappa r)] + \dots \\
 &- \frac{(\kappa a) \cos^2 \gamma}{1! 2} \left\{ \frac{a}{r} J_2(\kappa a) [S_2(\kappa r) - i C_2(\kappa r)] + \frac{3}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^3 J_3(\kappa a) [S_3(\kappa r) - i C_3(\kappa r)] \right. \\
 &+ \left. \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \left(\frac{a}{r}\right)^3 J_4(\kappa a) [S_4(\kappa r) - i C_4(\kappa r)] + \dots \right\} \\
 &+ \frac{(\kappa a)^2 \cos^4 \gamma}{2! 2^2} \left\{ \frac{a}{r} J_3(\kappa a) [S_3(\kappa r) - i C_3(\kappa r)] + \frac{5}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^2 J_4(\kappa a) [S_4(\kappa r) - i C_4(\kappa r)] \right. \\
 &+ \left. \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4} \left(\frac{a}{r}\right)^3 J_5(\kappa a) [S_5(\kappa r) - i C_5(\kappa r)] + \dots \right\} \\
 &- \frac{(\kappa a)^3 \cos^6 \gamma}{3! 2^3} \left\{ \frac{a}{r} J_4(\kappa a) [S_4(\kappa r) - i C_4(\kappa r)] + \frac{7}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^2 J_5(\kappa a) [S_5(\kappa r) - i C_5(\kappa r)] \right. \\
 &+ \left. \frac{7 \cdot 9}{2 \cdot 4} \left(\frac{a}{r}\right)^3 J_6(\kappa a) [S_6(\kappa r) - i C_6(\kappa r)] + \dots \right\} \\
 &+ \dots
 \end{aligned} \quad (35)$$

Setzen wir $\cos \gamma = 0$ (d. h. der Aufpunkt liegt in der Membranebene), so verschwinden in (35) alle Glieder außer der ersten Zeile. Dies Ergebnis steht in Übereinstimmung mit einer früher¹²⁾ vom Verfasser abgeleiteten Formel.

Prinzipiell ist die Entwicklung von $\Re(r, \gamma)$ durch (34) für beliebiges $w(\varrho)$ gegeben. Dabei kann $w(\varrho)$ z. B. als Ergebnis von Messungen durch eine Kurve bestimmt sein. Man hat dann nur nötig, die Koeffizienten B_m nach (11) durch graphische Integration zu berechnen.

c) Die Darstellung der Entwicklungskoeffizienten durch Besselsche Funktionen

Wir stellen uns nun die Aufgabe für $w(\varrho) = (1 - \varrho^2/a^2)^{p-1}$ aus $\mathfrak{S}_0^{[p]}(z)$ $= 2^p p! \frac{J_p(\kappa a \sqrt{1-z^2})}{(\kappa a \sqrt{1-z^2})^p}$ die Entwicklungskoeffizienten $\mathfrak{S}_m^{[p]}(z)$ durch direktes Ausführen der Differentiationen nach (32) zu berechnen. Wir setzen zur Abkürzung:

$$u = \kappa a \sqrt{1-z^2}, \quad Z_m = (1-z^2)^m, \quad \varphi_p = \frac{J_p(u)}{u^p},$$

dann ist:

$$u' = -\frac{\kappa a z}{\sqrt{1-z^2}} = -(\kappa a)^2 \frac{z}{u} \quad \text{und} \quad \frac{d^n (1-z^2)^m}{dz^n} = Z_m^{(n)},$$

und es folgt nach den Regeln der Differentialrechnung aus (32):

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^m \mathfrak{S}_m^{[p]}(z)}{2^p p!} &= Z_m^{(m)} \varphi_p^{(m)} + \binom{m}{1} Z_m^{(m-1)} \varphi_p^{(m+1)} + \binom{m}{2} Z_m^{(m-2)} \varphi_p^{(m+2)} + \dots \\ &+ \binom{m}{m-1} Z_m' \varphi_p^{(2m-1)} + \binom{m}{m} Z_m \varphi_p^{(2m)}. \end{aligned} \quad (36)$$

Die höheren Ableitungen von φ_p ergeben sich aus:

$$\frac{\varphi_p'}{\kappa a} = \kappa a \cdot z \cdot \varphi_{p+1}$$

indem man beide Seiten wiederholt differenziert:

$$\frac{\varphi_p''}{(\kappa a)^2} = \varphi_{p+1} + (\kappa a z)^2 \varphi_{p+2}$$

$$\frac{\varphi_p'''}{(\kappa a)^3} = 3 \kappa a z \varphi_{p+2} + (\kappa a z)^3 \varphi_{p+3}$$

$$\frac{\varphi_p^{(4)}}{(\kappa a)^4} = 3 \varphi_{p+2} + 6 (\kappa a z)^2 \varphi_{p+3} + (\kappa a z)^4 \varphi_{p+4}$$

$$\frac{\varphi_p^{(5)}}{(\kappa a)^5} = 15 \kappa a z \varphi_{p+3} + 10 (\kappa a z)^3 \varphi_{p+4} + (\kappa a z)^5 \varphi_{p+5}.$$

¹²⁾ H. Stenzel, Ann. Physik 41, 250 (1942).

So erhalten wir allgemein:

$$\frac{q_p^{(2n)}}{(\kappa a)^{2n}} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \left[q_{p+n} + 2n \frac{(\kappa a z)^2}{2!} q_{p+n+1} \right. \\ \left. + 2n(2n-2) \frac{(\kappa a z)^4}{4!} q_{p+n+2} + \cdots \frac{2^n \cdot n! (\kappa a z)^{2n}}{(2n)!} q_{p+2n} \right] \quad (37)$$

$$\frac{q_p^{(2n+1)}}{(\kappa a)^{2n+1}} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1) \left[(\kappa a z) q_{p+n+1} + 2n \frac{(\kappa a z)^3}{3!} q_{p+n+2} \right. \\ \left. + 2n(2n-2) \frac{(\kappa a z)^5}{5!} q_{p+n+3} + \cdots \frac{2^n \cdot n! (\kappa a z)^{2n+1}}{(2n+1)!} q_{p+2n+1} \right]. \quad (38)$$

Setzen wir (37) und (38) in (36) ein, so können wir nach Ausführung der Differentiationen $[(1-z^2)^m]^{(m)}, [(1-z^2)^m]^{(m-1)}$ usw. die Entwicklungskoeffizienten $\mathcal{G}_m^{[p]}(z)$ berechnen. So ergibt eine einfache Rechnung für die 4 ersten Koeffizienten die folgenden Formeln, wobei die Abkürzungen: $u = \kappa a \sin \gamma$ und $t^2 = \frac{z^2}{1-z^2} = \cot^2 \gamma$ benutzt sind:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{G}_0^{[p]}}{2^p \cdot p!} &= u^{-p} J_p(u); & -\frac{\mathcal{G}_1^{[p]}}{2^p \cdot p!} &= (1-2t^2) u^{1-p} J_{1+p}(u) + t^2 u^{2-p} J_{2+p}(u); \\ \frac{\mathcal{G}_2^{[p]}}{2^p \cdot p!} &= (-4+8t^2) u^{1-p} J_{1+p}(u) + (3-28t^2+8t^4) u^{2-p} J_{2+p}(u) \\ &\quad + (6t^2-8t^4) u^{3-p} J_{3+p}(u) + t^4 u^{4-p} J_{4+p}(u); \\ (36) \quad -\frac{\mathcal{G}_3^{[p]}}{2^p \cdot p!} &= (-54+432t^2-144t^4) u^{2-p} J_{2+p}(u) \\ &\quad + (15-378t^2+504t^4-48t^6) u^{3-p} J_{3+p}(u) \\ &\quad + (45t^2-198t^4+72t^6) u^{4-p} J_{4+p}(u) + (15t^4-18t^6) u^{5-p} J_{5+p}(u) \\ &\quad + t^6 u^{6-p} J_{6+p}(u); \\ &\quad (39) \\ \frac{\mathcal{G}_4^{[p]}}{2^p \cdot p!} &= (432-3456t^2+1152t^4) u^{2-p} J_{2+p}(u) \\ &\quad + (-720+13824t^2-18432t^4+2304t^6) u^{3-p} J_{3+p}(u) \\ &\quad + (105-5520t^2+18864t^4-8832t^6+384t^8) u^{4-p} J_{4+p}(u) \\ &\quad + (420t^2-4080t^4+4896t^6-786t^8) u^{5-p} J_{5+p}(u) \\ &\quad + (210t^4-720t^6+288t^8) u^{6-p} J_{6+p}(u) + (28t^6-32t^8) u^{7-p} J_{7+p}(u) \\ &\quad + t^8 u^{8-p} J_{8+p}(u). \end{aligned}$$

Für $z=1$, d. h. wenn der Aufpunkt auf der Mittelachse liegt, versagen die Formeln (39). Für $z=1$ finden wir aber $Z_m^{(n)} = 0$ für $n < m$, und $Z_m^{(m)} = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m$. Damit ergibt sich dann aus (36):

$$(-1)^m \frac{\mathcal{G}_m^{[p]}(1)}{2^p \cdot p!} = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m q_{p(z=1)}^{(m)}. \quad (40)$$

Und wir erhalten wegen $\varphi_{m(z=1)} = \frac{1}{2^m \cdot m!}$ aus (37) und (38) für den Aufpunkt auf der Mittelachse:

$$\mathfrak{E}_{2n}^{[p]}(1) = \frac{(2n)!(2n)!}{n!} p! \left\{ \frac{(xa)^{2n}}{(p+n)!} + \frac{n(xa)^{2n+2}}{2!(p+n+1)!} + \frac{n(n-1)(xa)^{2n+4}}{4!(p+n+2)!} \right. \\ \left. + \dots + \frac{n!(xa)^{4n}}{(2n)!(p+2n)!} \right\} \quad (41)$$

$$\mathfrak{E}_{2n+1}^{[p]}(1) = \frac{(2n+1)!(2n+1)!}{n!} p! \left\{ \frac{(xa)^{2n+2}}{(p+n+1)!} + \frac{n(xa)^{2n+4}}{3!(p+n+2)!} \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)(xa)^{2n+6}}{5!(p+n+3)!} + \dots + \frac{n!(xa)^{4n+2}}{(2n+1)!(p+2n+1)!} \right\}. \quad (42)$$

Wir hätten (41) und (42) auch unmittelbar aus (20) unter Berücksichtigung von (6) ableiten können.

4. Die Darstellung von $\mathfrak{H}(r, \gamma)$ mit Hilfe von $\mathfrak{H}(r, \alpha)$ nach steigenden Potenzen von $\sin \gamma$

a) Die Darstellung der Entwicklungskoeffizienten durch einen Differentialoperator

Im 3. Abschnitt waren wir mit Hilfe der nach fallenden Potenzen von xr fortschreitenden Reihe für $f_n(i \cdot xr)$ von einer entsprechenden Reihe für $\mathfrak{H}(r, \gamma)$ ausgegangen und konnten die auftretenden Entwicklungskoeffizienten \mathfrak{E}_m mit Hilfe der Differentialgleichung der Kugelfunktionen bestimmen. Jetzt werden wir ganz analog mit Hilfe der nach steigenden Potenzen von $\sin \gamma$ fortschreitenden Reihe für die Kugelfunktionen von einer entsprechenden Reihe für $\mathfrak{H}(r, \gamma)$ ausgehen und die auftretenden Entwicklungskoeffizienten \mathfrak{I}_m mit Hilfe einer Differentialgleichung für $f_n(i \cdot xr)$ bestimmen. Wir benutzen die Darstellung der Kugelfunktionen durch eine hypergeometrische Funktion¹³⁾:

$$P_n(\cos \gamma) = F\left(\frac{n+1}{2}, -\frac{n}{2}, 1; \sin^2 \gamma\right).$$

Daraus folgt:

$$P_{2n}(\cos \gamma) = 1 - \frac{2n(2n+1)}{1!1!2^2} \sin^2 \gamma + \frac{(2n-2)2n(2n+1)(2n+3)}{2!2!2^4} \sin^4 \gamma - \dots^{14)} \quad (43)$$

Setzen wir dies in (7) ein, so können wir $\mathfrak{H}(r, \gamma)$ in der Form schreiben:

$$\mathfrak{H}(r, \gamma) = \mathfrak{I}_0(r) - \mathfrak{I}_1(r) \frac{\sin^2 \gamma}{1!1!2^2} + \mathfrak{I}_2(r) \frac{\sin^4 \gamma}{2!2!2^4} - \dots \quad (44)$$

¹³⁾ E. Hobson, Spherical and Ellipsoidal Harmonics, Cambridge 1931, S. 219. Dabei ist in der dort angegebenen Formel $m = 0$ gesetzt.

¹⁴⁾ An Stelle (43) hätten wir auch die bekanntere Darstellung:

$$P_{2n}(\cos \gamma) = 1 - \frac{2n(2n+1)}{1^2} \sin^2 \gamma/2 + \frac{(2n-1)2n(2n+1)(2n+2)}{1^2 \cdot 2^2} \sin^4 \gamma/2 - \dots$$

(s. Rayleigh, Theory of Sound § 336) benutzen können. Doch werden die dann sich ergebenden Koeffizienten \mathfrak{I}_m weniger übersichtlich.

Dabei ist:

$$\mathfrak{I}_0(r) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}(\alpha a) f_{2n}(i \alpha r) = \Re(r, o)$$

$$\mathfrak{I}_1(r) = \sum_{n=0}^{\infty} 2n(2n+1) A_{2n}(\alpha a) f_{2n}(i \alpha r) \quad (45)$$

$$\mathfrak{I}_2(r) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n-2)2n(2n+1)(2n+3) A_{2n}(\alpha a) f_{2n}(i \alpha r) \\ \text{usw.}$$

Wir wollen dann zur Vereinfachung auf der rechten Seite von (6) $i/2 \alpha r$ durch q ersetzen und die entsprechende Funktion betrachten:

$$f_n(q) = 1 + n(n+1) \frac{q}{1!} + (n-1)n(n+1)(n+2) \frac{q^2}{2!} + \dots + (2n)! \frac{q^n}{n!}.$$

Es macht dann keine Schwierigkeit, die beiden folgenden Behauptungen zu verifizieren:

1. $f_n(q)$ genügt der Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dq} \left\{ q^2 \frac{df_n}{dq} + f_n \right\} = n(n+1) f_n. \quad (46)$$

2. Es besteht die Rekursionsformel:

$$f_{n+1} = 2(2n+1) q f_n + f_{n-1}. \quad (47)$$

Ähnlich wie früher definieren wir nun die Operatoren:

$$\mathfrak{D}_1[f_n] = \frac{d}{dq} \left\{ q^2 \frac{df_n}{dq} + f_n \right\} \quad (48)$$

$$\mathfrak{D}_2[f_n] = \mathfrak{D}_1[\mathfrak{D}_1[f_n]] - 2 \cdot 3 \mathfrak{D}_1[f_n] \quad (49)$$

$$\mathfrak{D}_3[f_n] = \mathfrak{D}_1[\mathfrak{D}_2[f_n]] - 4 \cdot 5 \mathfrak{D}_2[f_n]$$

$$\vdots$$

$$\mathfrak{D}_m[f_n] = \mathfrak{D}_1[\mathfrak{D}_{m-1}[f_n]] - (2m-2)(2m-1) \mathfrak{D}_{m-1}[f_n]. \quad (50)$$

Damit ergeben sich aus:

$$n(n+1) - 2 \cdot 3 = (n-2)(n+3)$$

$$n(n+1) - 4 \cdot 5 = (n-4)(n+5)$$

$$\vdots$$

$$n(n+1) - (2m-2)(2m-1) = (n-(2m-2))(n+2m-1)$$

die Beziehungen:

$$\mathfrak{D}_1[f_n] = n(n+1) f_n, \quad \mathfrak{D}_2[f_n] = (n-1)n(n+1)(n+2) f_n, \quad \text{usw.}$$

Dann ist:

$$\mathfrak{I}_1(r) = \mathfrak{D}_1[\mathfrak{I}_0], \quad \mathfrak{I}_2(r) = \mathfrak{D}_2[\mathfrak{I}_0], \quad \text{usw.} \quad (51)$$

Eine direkte Darstellung von $\mathfrak{D}_m[\mathfrak{I}_0]$ durch Differentialquotienten höherer Ordnung in Analogie zu der Formel (29) scheint hier nicht zu existieren.

b) Die Darstellung von $\Re(r, \gamma)$ mit Hilfe der Reihenentwicklung:

$$\Re(r, o) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n q^n f_n(q)$$

Um den Operator \mathfrak{D}_m allgemein auf $\Re(r, o) = \mathfrak{I}_o(r)$ anwenden zu können, ist es in Rücksicht auf die Reihenentwicklung (18) zweckmäßig, die Operation $\mathfrak{D}_m [q^n f_n]$ für $m = 1, 2, \dots$ zu untersuchen.

Um $\mathfrak{D}_1 [q^n f_n]$ zu finden, benutzen wir die Rekursionsformel (47).

Damit folgt wegen (46) und (48):

$$\begin{aligned} 2(2n+1) \mathfrak{D}_1 [q f_n] &= (n+1)(n+2) f_{n+1} - (n-1) n f_n \\ &= (4n+2) f_{n+1} + (n^2 - n) (f_{n+1} - f_n). \end{aligned}$$

Und unter Berücksichtigung von (47) ergibt sich:

$$\mathfrak{D}_1 [q f_n] = f_{n+1} + (n-1) n q f_n.$$

Analog leiten wir die weiteren Beziehungen ab:

$$\mathfrak{D}_1 [q^2 f_n] = 2 q f_{n+1} + (n-2)(n-1) q^2 f_n$$

$$\mathfrak{D}_1 [q^3 f_n] = 3 q^2 f_{n+1} + (n-3)(n-2) q^3 f_n$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\mathfrak{D}_1 [q^{n-2} f_n] = (n-2) q^{n-3} f_{n+1} + 2 \cdot 3 q^{n-2} f_n \quad (52)$$

$$\mathfrak{D}_1 [q^{n-1} f_n] = (n-1) q^{n-2} f_{n+1} + 1 \cdot 2 q^{n-1} f_n \quad (53)$$

$$\mathfrak{D}_1 [q^n f_n] = n q^{n-1} f_{n+1}. \quad (54)$$

Dann folgt aus (49) und (54):

$$\mathfrak{D}_2 [q^n f_n] = n \mathfrak{D}_1 [q^{n-1} f_{n+1}] - 2 \cdot 3 n q^{n-1} f_{n+1}.$$

Und wegen (52):

$$\mathfrak{D}_2 [q^n f_n] = n(n-1) q^{n-2} f_{n+2}.$$

So ergibt sich schließlich allgemein:

$$\mathfrak{D}_m [q^n f_n] = n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1) q^{n-m} f_{n+m} \quad (1 \leq m \leq n) \quad (55)$$

$$\mathfrak{D}_m [q^n f_n] = 0 \quad (n < m).$$

Liegt dann $\Re(r, o)$ in der durch (18) angegebenen Form vor, so folgt aus (51) und (55):

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_0(r) &= 1 + i \varepsilon_1 \frac{f_1(i \kappa r)}{2 \kappa r} + i^2 \varepsilon_2 \frac{f_2(i \kappa r)}{(2 \kappa r)^2} + i^3 \varepsilon_3 \frac{f_3(i \kappa r)}{(2 \kappa r)^3} + \dots \\ \mathfrak{I}_1(r) &= 1 \varepsilon_1 f_2(i \kappa r) + i 2 \varepsilon_2 \frac{f_3(i \kappa r)}{2 \kappa r} + i^2 3 \varepsilon_3 \frac{f_4(i \kappa r)}{(2 \kappa r)^2} + i^3 4 \varepsilon_4 \frac{f_5(i \kappa r)}{(2 \kappa r)^3} + \dots \\ \mathfrak{I}_2(r) &= 1 \cdot 2 \varepsilon_2 f_3(i \kappa r) + i 2 \cdot 3 \varepsilon_3 \frac{f_4(i \kappa r)}{2 \kappa r} + i^2 3 \cdot 4 \varepsilon_4 \frac{f_5(i \kappa r)}{(2 \kappa r)^2} \\ &\quad + i^3 4 \cdot 5 \varepsilon_5 \frac{f_6(i \kappa r)}{(2 \kappa r)^3} + \dots \\ \mathfrak{I}_3(r) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \varepsilon_3 f_4(i \kappa r) + i 2 \cdot 3 \cdot 4 \varepsilon_4 \frac{f_5(i \kappa r)}{2 \kappa r} + i^2 3 \cdot 4 \cdot 5 \varepsilon_5 \frac{f_6(i \kappa r)}{(2 \kappa r)^2} \\ &\quad + i^3 4 \cdot 5 \cdot 6 \varepsilon_6 \frac{f_7(i \kappa r)}{(2 \kappa r)^3} + \dots \end{aligned} \quad (56)$$

und insbesondere nach (20) für die Kolbenmembran ($p = 1$):

$$\begin{aligned}\frac{\mathfrak{I}_1^{[1]}(r)}{(\kappa a)^2} &= \frac{1}{2!} f_2(i\kappa r) + i \frac{2(\kappa a)^2}{3!} \frac{f_3(i\kappa r)}{2\kappa r} + i^2 \frac{3(\kappa a)^4}{4!} \frac{f_4(i\kappa r)}{(2\kappa r)^2} + \dots \\ \frac{\mathfrak{I}_2^{[1]}(r)}{(\kappa a)^4} &= \frac{1 \cdot 2}{3!} f_4(i\kappa r) + i \frac{2 \cdot 3(\kappa a)^2}{4!} \frac{f_5(i\kappa r)}{2\kappa r} + i^2 \frac{3 \cdot 4(\kappa a)^4}{5!} \frac{f_6(i\kappa r)}{(2\kappa r)^2} + \dots \\ \frac{\mathfrak{I}_3^{[1]}(r)}{(\kappa a)^6} &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4!} f_6(i\kappa r) + i \frac{2 \cdot 3 \cdot 4(\kappa a)^2}{5!} \frac{f_7(i\kappa r)}{2\kappa r} + i^2 \frac{3 \cdot 4 \cdot 5(\kappa a)^4}{6!} \frac{f_8(i\kappa r)}{(2\kappa r)^2} + \dots\end{aligned}\quad (57)$$

Führen wir noch die Funktionen S_n und C_n entsprechend (5) ein, so erhalten wir aus (57), (2) und (44):

$$\begin{aligned}p_a + i p_m &= \frac{(\kappa a)^2}{2\kappa r} [S_0(\kappa r) - i C_0(\kappa r)] - \frac{(\kappa a)^4}{2^2 \cdot 2! (\kappa r)^2} [S_1(\kappa r) - i C_1(\kappa r)] \\ &\quad + \frac{(\kappa a)^6}{2^3 \cdot 3! (\kappa r)^3} [S_2(\kappa r) - i C_2(\kappa r)] - \dots \\ &\quad + \frac{(\kappa a \sin \gamma)^2}{1! 1! 2^2} \left\{ \frac{(\kappa a)^2}{2 \cdot 2! (\kappa r)} [S_2(\kappa r) - i C_2(\kappa r)] - \frac{2(\kappa a)^4}{2^2 \cdot 3! (\kappa r)^2} [S_3(\kappa r) - i C_3(\kappa r)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{3(\kappa a)^6}{2^3 \cdot 4! (\kappa r)^3} [S_4(\kappa r) - i C_4(\kappa r)] - \dots \right\} \\ &\quad + \frac{(\kappa a \sin \gamma)^4}{2! 2! 2^4} \left\{ \frac{1 \cdot 2(\kappa a)^2}{2 \cdot 3! (\kappa r)} [S_4(\kappa r) - i C_4(\kappa r)] - \frac{2 \cdot 3(\kappa a)^4}{2^2 \cdot 4! (\kappa r)^2} [S_5(\kappa r) - i C_5(\kappa r)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{3 \cdot 4(\kappa a)^6}{2^3 \cdot 5! (\kappa r)^3} [S_6(\kappa r) - i C_6(\kappa r)] - \dots \right\} \\ &\quad + \frac{(\kappa a \sin \gamma)^6}{3! 3! 2^6} \left\{ \frac{1 \cdot 2 \cdot 3(\kappa a)^2}{2 \cdot 4! (\kappa r)} [S_6(\kappa r) - i C_6(\kappa r)] - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4(\kappa a)^4}{2^2 \cdot 5! (\kappa r)^2} [S_7(\kappa r) - i C_7(\kappa r)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5(\kappa a)^6}{2^3 \cdot 6! (\kappa r)^3} [S_8(\kappa r) - i C_8(\kappa r)] - \dots \right\} \\ &\quad + \dots\end{aligned}\quad (58)$$

5. Konvergenzbetrachtungen und Berechnung praktischer Beispiele

Für das Folgende beschränken wir uns auf den Fall der Kolbenmembran ($p = 1$). Zunächst wollen wir (35) in etwas anderer Form schreiben, indem wir für die Besselfunktionen $J_n(\kappa a)$ die Darstellung benutzen:

$$J_n(\kappa a) = \frac{(\kappa a)^n}{2^n n!} \alpha_n,$$

dabei ist:

$$\alpha_n = 1 - \frac{(\kappa a/2)^2}{1!(n+1)} + \frac{(\kappa a/2)^4}{2!(n+1)(n+2)} - \dots$$

Dann folgt aus (35):

$$\begin{aligned}
 p_a + i p_m = & \frac{(\kappa a)^2 S_0(\kappa r) - i C_0(\kappa r)}{2 \cdot 1!} \frac{\alpha_1}{\kappa r} + \frac{(\kappa a)^4 S_1(\kappa r) - i C_1(\kappa r)}{2^2 \cdot 2!} \frac{1}{(\kappa r)^2} \frac{1}{2} \alpha_2 \\
 & + \frac{(\kappa a)^6 S_2(\kappa r) - i C_2(\kappa r)}{2^3 \cdot 3!} \frac{1}{(\kappa r)^3} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \alpha_3 + \dots \\
 & - \frac{(\kappa a \cos \gamma)^2}{1! 1! 2^2} \left\{ \frac{1 \cdot (\kappa a)^2 S_2(\kappa r) - i C_2(\kappa r)}{2 \cdot 2!} \frac{\alpha_2}{\kappa r} + \frac{2 \cdot (\kappa a)^4 S_3(\kappa r) - i C_3(\kappa r)}{2^2 \cdot 3!} \frac{1}{(\kappa r)^2} \frac{3}{4} \alpha_3 \right. \\
 & \left. + \frac{3 \cdot (\kappa a)^6 S_4(\kappa r) - i C_4(\kappa r)}{2^3 \cdot 4!} \frac{1}{(\kappa r)^3} \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \alpha_4 + \dots \right\} \\
 & + \frac{(\kappa a \cos \gamma)^4}{2! 2! 2^4} \left\{ \frac{1 \cdot 2 \cdot (\kappa a)^2 S_4(\kappa r) - i C_4(\kappa r)}{2 \cdot 3!} \frac{\alpha_3}{\kappa r} + \frac{2 \cdot 3 \cdot (\kappa a)^4 S_5(\kappa r) - i C_5(\kappa r)}{2^2 \cdot 4!} \frac{1}{(\kappa r)^2} \frac{5}{6} \alpha_4 \right. \\
 & \left. + \frac{3 \cdot 4 \cdot (\kappa a)^6 S_6(\kappa r) - i C_6(\kappa r)}{2^3 \cdot 5!} \frac{1}{(\kappa r)^3} \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \alpha_5 + \dots \right\} \\
 & - \frac{(\kappa a \cos \gamma)^6}{3! 3! 2^6} \left\{ \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (\kappa a)^2 S_6(\kappa r) - i C_6(\kappa r)}{2 \cdot 4!} \frac{\alpha_4}{\kappa r} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (\kappa a)^4 S_7(\kappa r) - i C_7(\kappa r)}{2^2 \cdot 5!} \frac{1}{(\kappa r)^2} \frac{7}{8} \alpha_5 \right. \\
 & \left. + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (\kappa a)^6 S_8(\kappa r) - i C_8(\kappa r)}{2^3 \cdot 6!} \frac{1}{(\kappa r)^3} \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{10} \alpha_6 + \dots \right\} \\
 & \text{usw.}
 \end{aligned} \tag{59}$$

Wir sehen, daß die einzelnen Glieder der Sinus-Entwicklung (35) sehr ähnlich den entsprechenden Gliedern der Cosinus-Entwicklung (59) sind. Da die in (59) hinzutretenden Faktoren α_1 , $\frac{1}{2} \alpha_2$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \alpha_3$ usw. unter einer festen (von n unabhängigen) Schranke liegen, genügt es die Konvergenz von (58) zu beweisen.

Daß der reelle Teil von (58) absolut für alle κa und κr konvergiert, folgt ohne weiteres aus der Ungleichung:

$$|S_n(\kappa r)| < \frac{(\kappa r)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2n-1}^{15}.$$

Für den imaginären Teil benutzen wir die Ungleichung:

$$|C_n(\kappa r)| < e^{(\kappa r)^2/2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2n-1}{(\kappa r)^n}^{15} \tag{60}$$

und betrachten in (58) etwa die unendliche Reihe in der geschweiften Klammer der 4. Zeile mit dem m -ten Glied:

$$a_m = \frac{m(m+1)(m+2)}{2^m(m+3)!} C_{m+5} \frac{(\kappa a)^{2m}}{(\kappa r)^m}.$$

Unter Benutzung von (60) bekommen wir dann die Vergleichsreihe mit dem allgemeinen Glied $|b_m| > |a_m|$. Dabei ist:

$$b_m = \frac{m(m+1)(m+2)}{2^m(m+3)!} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2m+9}{(\kappa r)^{m+5}} \frac{(\kappa a)^{2m}}{(\kappa r)^m}.$$

¹⁵ Die Ungleichungen ergeben sich aus der Reihenentwicklung für S_n und C_n . Vgl. E.N.T. 12, 19 (1935).

Hier strebt der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder

$$\frac{b_{m+1}}{b_m} = \frac{(m+3)(2m+11)a^2}{2m(m+4)r^2} \rightarrow \frac{a^2}{r^2}.$$

Die Vergleichsreihe ist daher für $a/r < 1$ konvergent und beschränkt. Daraus ergibt sich, daß der imaginäre Teil von (35) für $r > a$ konvergent ist.

Wir wollen nun die Wirksamkeit der 3 Entwicklungen (58), (35) und (21) (39) für den Fall $\kappa a = 10$, $\kappa r = 100$ untersuchen. Mit Hilfe von (58) erhalten wir die Tabelle 1.

Tabelle 1
 $\kappa r = 100$

$\sin \gamma$	$p_a + i p_m$	
0	-0,13716 - 0,47416 i	1
0,1	-0,12700 - 0,41606 i	5
0,2	-0,09846 - 0,26925 i	6
0,3	-0,05821 - 0,10029 i	7
0,4	-0,01794 + 0,02294 i	9
0,5	+0,00912 + 0,06699 i	10
0,6	+0,06542 + 0,04500 i	10
0,7	+0,0047 - 0,0003 i	10
0,8	+0,01 - 0,03 i	10

Tabelle 2
 $\kappa r = 100$

$\cos \gamma$	$p_a + i p_m$	
0	-0,00330 - 0,00309 i	1
0,1	-0,00396 - 0,00422 i	3
0,2	-0,00588 - 0,00752 i	5
0,3	-0,00878 - 0,01364 i	6
0,4	-0,01180 - 0,02156 i	8
0,5	-0,01293 - 0,02881 i	9
0,6	-0,00893 - 0,02806 i	10
0,7	+0,0027 - 0,0058 i	10

Dabei geben die Ziffern in der letzten Kolonne an, wieviel Zeilen in der Formel erforderlich waren, um 5 Stellen hinter dem Komma zu berechnen. Die Ziffer 10 bedeutet also, daß die Reihe (58) bis $(\kappa a \sin \gamma)^{18}$ ausgewertet wurde. Für $\sin \gamma \geq 0,7$ reicht auch dies nicht mehr aus, die Konvergenz wird dann immer schlechter. Es ist dann besser, die Cosinus-Entwicklung nach (35) zu verwenden. Hier erhalten wir die Tabelle 2.

Wie wir aus der oben bemerkten Ähnlichkeit der Entwicklung von (58) und (35) erwarten konnten, ergibt sich hier eine gute Konvergenz so lange $\cos \gamma \leq 0,7$ ist.

Schließlich berechnen wir $p_a + i p_m$ nach der r -Entwicklung (21) (39) für $p = 1$ und erhalten die Tabelle 3.

Zunächst überzeugen wir uns, daß der Wert für $\gamma = 0$, den wir direkt durch:

$$p_a + i p_m = e^{i\kappa\sqrt{r^2+a^2}} - e^{i\kappa r} = -0,13716 - 0,47415 i$$

berechnen können, bis auf 5 Stellen genau wiedergegeben wird. Das war nach dem Verlauf der einzelnen Summanden \mathfrak{S}_0 , $i \mathfrak{S}_{1/(2\kappa r)}$, $i^2 \mathfrak{S}_{2/(2\kappa r)^2}$ usw. auch zu erwarten. Aus diesem Verlauf werden wir aber auch für $\sin \gamma = 0,1$, $0,2$, $0,3$ usw. folgern, daß sämtliche Werte von $p_a + i p_m$ in Tabelle 3 bis auf mindestens 4 Stellen genau wiedergegeben werden. Wir können dies für die Werte $\sin \gamma = 0,1$ bis $\sin \gamma = 0,7$ aus dem Vergleich mit der Tabelle 1 beweisen und ferner aus Tabelle 2 den Wert $\cos \gamma = 0,6$ d. h. $\sin \gamma = 0,8$ zum Vergleich benutzen.

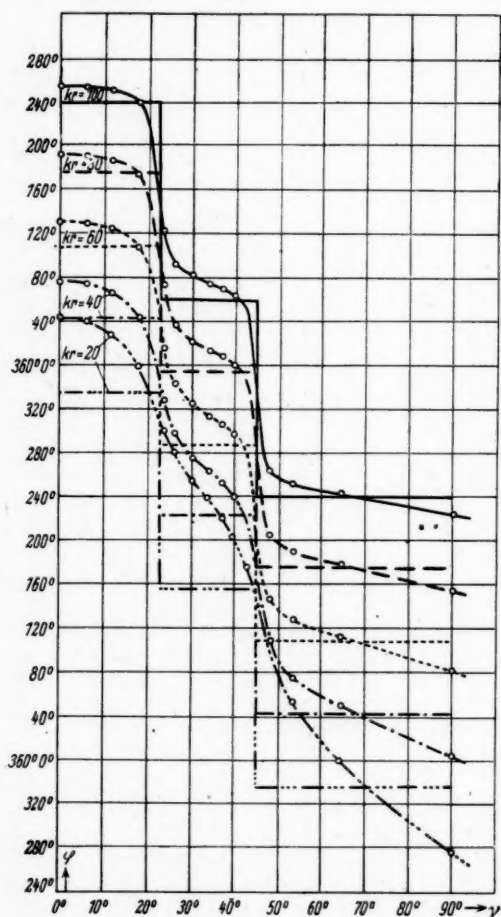
Für einen Vergleich mit der bekannten Annäherungsformel:

$$p_a^* + i p_m^* = \frac{-i e^{i\kappa r}}{\kappa r} \frac{(\kappa a)^2}{2} \frac{2 J_1(\kappa a \sin \gamma)}{(\kappa a \sin \gamma)}, \quad (61)$$

welche aus (21) hervorgeht, wenn wir uns auf die erste Näherung $\mathfrak{S}_0(z)$ beschränken, ist in den letzten Kolonnen von Tabelle 3 dieser Wert und $|p_a^* + i p_m^*|$ angegeben. Wir sehen daraus, daß $|p_a^* + i p_m^*|$ einigermaßen genaue Werte gibt. Eine

Tabelle
 αr

$\sin \gamma$	$\mathcal{E}_0(z)$	$i \mathcal{E}_1(z)/2 \alpha r$	$i^2 \mathcal{E}_2(z)/2 \cdot 4 (\alpha r)^2$	$i^3 \mathcal{E}_3(z)/2 \cdot 4 \cdot 6 (\alpha r)^3$	$i^4 \mathcal{E}_4(z)/2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 (\alpha r)^4$
0	1	+0,25000 i	-0,04416	-0,00646 i	+0,00085
0,1	0,88010	+0,20699 i	-0,03450	-0,00472 i	+0,00057
0,2	0,57672	+0,10394 i	-0,01269	-0,00107 i	+0,00004
0,3	0,22604	-0,00031 i	+0,00613	+0,00152 i	-0,00025
0,4	-0,08302	-0,05574 i	+0,01179	+0,00158 i	-0,00015
0,5	-0,13103	-0,05240 i	+0,00625	+0,00025 i	+0,00005
0,6	-0,09223	-0,01845 i	-0,00104	-0,00057 i	+0,00008
0,7	-0,00134	+0,00895 i	-0,00324	-0,00036 i	+0,00001
0,8	0,05866	+0,01296 i	-0,00120	+0,00007 i	-0,00002
0,9	0,05451	+0,00305 i	+0,00046	+0,00008 i	0
1	0,00869	-0,00255 i	-0,00002	-0,00002 i	0



Ausnahme machen die Werte für $\sin \gamma = 0,4$ und $\sin \gamma = 0,7$. Das ist verständlich, wenn man bedenkt, daß hier die Werte $ka \sin \gamma = 4$ und $\alpha a \sin \gamma = 7$ in unmittelbarer Nähe der Nullstellen von $J_1(\alpha a \sin \gamma)$ liegen, da die ersten beiden Nullstellen von $J_1(x)$ durch $x_1 = 3,832$ und $x_2 = 7,016$ gegeben sind. Es ist klar, daß dann die zweite Näherung $\mathcal{E}_1(z)$ von wesentlichem Einfluß sein wird.

Dagegen können wir nicht erwarten, daß der von γ abhängige Phasengang von $\varphi^* = \arctg p_m^*/p_a^*$ den wahren Verhältnissen gerecht wird, da der mit γ veränderliche Faktor nur positive oder negative Werte annimmt, d. h. die Phase bleibt zwischen zwei Nullstellen von $J_1(\alpha a \sin \gamma)$ konstant und springt an den Nullstellen

Abb. 2. Phasenfunktionen $\varphi = \arctg p_m/p_a$ für $\alpha r = 20$, $\alpha r = 40$, $\alpha r = 60$, $\alpha r = 80$, $\alpha r = 100$ und die entsprechenden treppenförmigen ersten Näherungen

3
= 100

$p_a + i p_m$	$ p_a + i p_m $	$p_a^* + i p_m^*$	$ p_a^* + i p_m^* $
-0,13716-0,47416 <i>i</i>	0,494	-0,25318-0,43116 <i>i</i>	0,500
-0,12703-0,41605 <i>i</i>	0,435	-0,22283-0,37946 <i>i</i>	0,440
-0,09846-0,26925 <i>i</i>	0,287	-0,14602-0,24866 <i>i</i>	0,288
-0,05820-0,10030 <i>i</i>	0,116	-0,05723-0,09746 <i>i</i>	0,113
-0,01794+0,02293 <i>i</i>	0,029	+0,00836+0,01424 <i>i</i>	0,017
+0,00910+0,06698 <i>i</i>	0,068	+0,03318+0,05650 <i>i</i>	0,066
+0,01539+0,04499 <i>i</i>	0,048	+0,02335+0,03977 <i>i</i>	0,046
+0,00486-0,00020 <i>i</i>	0,005	+0,00034+0,00058 <i>i</i>	0,001
-0,00892-0,02806 <i>i</i>	0,029	-0,01485-0,02529 <i>i</i>	0,029
-0,01257-0,02449 <i>i</i>	0,028	-0,01380-0,02350 <i>i</i>	0,027
-0,00330-0,00309 <i>i</i>	0,005	-0,00220-0,00375 <i>i</i>	0,004

selbst um 180°. Hierauf wurde schon in der erwähnten Arbeit von H. Backhaus hingewiesen (s. Abb. 2).

Als zweites Beispiel berechnen wir $p_a + i p_m$ für $\alpha a = 10$, $\alpha r = 20$ und erhalten die entsprechenden Tabellen 1' und 2'.

Tabelle 1' $\alpha r = 20$			Tabelle 2' $\alpha r = 20$		
$\sin \gamma$	$p_a + i p_m$		$\cos \gamma$	$p_a + i p_m$	
0	1,34058+1,27412 <i>i</i>	1	0	0,00262-0,04220 <i>i</i>	1
0,1	1,27929+1,07688 <i>i</i>	4	0,1	0,01206-0,04667 <i>i</i>	4
0,2	1,08048+0,57024 <i>i</i>	6	0,2	0,04244-0,05593 <i>i</i>	6
0,3	0,72939-0,02240 <i>i</i>	8	0,3	0,09552-0,05610 <i>i</i>	8
0,4	0,27585-0,43539 <i>i</i>	9	0,4	0,15872-0,02429 <i>i</i>	10
0,5	-0,13090-0,49733 <i>i</i>	10	0,5	0,18579+0,05382 <i>i</i>	10
0,6	-0,3018 -0,2502 <i>i</i>	10	0,6	0,09921+0,13746 <i>i</i>	10
0,7	-0,16 +0,05 <i>i</i>	10	0,7	-0,1309 +0,0944 <i>i</i>	10

Hier ergibt sich wieder, daß die Sinus-Entwicklung für $\sin \gamma < 0,7$ und die Cosinus-Entwicklung für $\cos \gamma < 0,7$ zweckmäßig ist. Dagegen können wir für die r -Entwicklung keine brauchbaren Ergebnisse (bei Anwendung von 4 Gliedern) erwarten, da das letzte Glied nicht mehr klein gegen 1 wird. Allgemein ist für größeres αa das ausschlaggebende Glied in \mathfrak{S}_4 durch die höchste Potenz, d. h. durch $\frac{(\alpha a)^8}{(2\alpha r)^4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \left[\frac{(\alpha a)^2}{2\alpha r} \right]^4 \frac{1}{120}$ gegeben. Für $\alpha a = 10$ und $\alpha r = 20$, $(\alpha a)^2/2\alpha r = 2,5$ ist dieser Wert $\sim 1/3$, so daß wir nicht einmal die erste Stelle nach dem Komma genau bekommen werden.

Setzen wir dagegen voraus, daß $(\alpha a)^2/2\alpha r < 1$ ist, so wird der obige Ausdruck $< 1/120$ und wir werden $p_a + i p_m$ dann auf 3 Stellen hinter dem Komma richtig finden. Das wird auch durch das erste Beispiel bestätigt, wo $(\alpha a)^2/2\alpha r = 1/2$ ist. Demgemäß wurden als weitere Beispiele $\alpha a = 10$, $\alpha r = 40$ nach der Sinus- und Cosinus-Entwicklung und $\alpha a = 10$, $\alpha r = 60$ sowie $\alpha a = 10$, $\alpha r = 80$ nach der r -Entwicklung berechnet (s. Abb. 2 und die Tabellen 4, 5, 6).

Tabelle 4
 $\kappa r = 40$

$\sin \gamma$	$p_a + i p_m$		$\cos \gamma$	$p_a + i p_m$	
0	0,25784 + 1,12563 i	1	0	0,01349 + 0,0010 i	1
0,1	0,26367 + 0,99005 i	5	0,1	0,01616 + 0,00337 i	4
0,2	0,26331 + 0,64252 i	6	0,2	0,02383 + 0,01118 i	5
0,3	0,22254 + 0,23165 i	8	0,3	0,03483 + 0,02578 i	7
0,4	0,13098 - 0,07861 i	8	0,4	0,04446 + 0,04745 i	9
0,5	0,02418 - 0,19272 i	9	0,5	0,04322 + 0,07023 i	10
0,6	-0,0387 - 0,1303 i	10	0,6	0,0190 + 0,0729 i	10
0,7	-0,03 - 0,003 i	10	0,7	-0,027 + 0,014 i	10

Tabelle 5
 $\kappa r = 60$

$\sin \gamma$	$\mathfrak{E}_0(z)$	$\frac{i \mathfrak{E}_1(z)}{2 \kappa r}$	$\frac{i^2 \mathfrak{E}_2(z)}{2 \cdot 4 (\kappa r)^2}$	$\frac{i^3 \mathfrak{E}_3(z)}{2 \cdot 4 \cdot 6 (\kappa r)^3}$	$\frac{i^4 \mathfrak{E}_4(z)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 (\kappa r)^4}$	$p_a + i p_m$
0	1	0,41667 i	-0,12269	-0,02990 i	0,00653	-0,5324 + 0,6027 i
0,1	0,88010	0,34499 i	-0,09584	-0,02187 i	0,00443	-0,4568 + 0,5439 i
0,2	0,57672	0,17323 i	-0,03525	-0,00493 i	0,00032	-0,2712 + 0,3873 i
0,3	0,22604	-0,00052 i	+0,01702	+0,00703 i	-0,00191	+0,0664 + 0,1897 i
0,4	-0,03302	-0,09291 i	+0,03275	+0,00733 i	-0,00116	+0,0683 + 0,0206 i
0,5	-0,13103	-0,08733 i	+0,01735	+0,00118 i	+0,00037	+0,0972 - 0,0680 i
0,6	-0,09223	-0,03075 i	+0,00290	-0,00265 i	+0,00065	+0,0505 - 0,0665 i
0,7	-0,00134	+0,01491 i	-0,00901	-0,00166 i	+0,00005	-0,0079 - 0,0115 i
0,8	0,05866	+0,02160 i	-0,00334	+0,00032 i	-0,00018	-0,0314 + 0,0382 i
0,9	0,05451	+0,00508 i	+0,00127	+0,00038 i	-0,000003	-0,0185 + 0,0429 i
1,0	0,00869	-0,00424 i	-0,00005	-0,00007 i	-0,000003	+0,0012 + 0,0080 i

Tabelle 6
 $\kappa r = 80$

$\sin \gamma$	$\mathfrak{E}_0(z)$	$\frac{i \mathfrak{E}_1(z)}{2 \kappa r}$	$\frac{i^2 \mathfrak{E}_2(z)}{2 \cdot 4 (\kappa r)^2}$	$\frac{i^3 \mathfrak{E}_3(z)}{2 \cdot 4 \cdot 6 (\kappa r)^3}$	$\frac{i^4 \mathfrak{E}_4(z)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 (\kappa r)^4}$	$p_a + i p_m$
0	1	0,31250 i	-0,06901	-0,01261 i	+0,00207	-0,6003 - 0,1221 i
0,1	0,88010	0,25874 i	-0,05391	-0,00923 i	+0,00140	-0,5313 - 0,0979 i
0,2	0,57672	0,12992 i	-0,01983	-0,00208 i	+0,00010	-0,3548 - 0,0410 i
0,3	0,22604	-0,00039 i	+0,00957	+0,00297 i	-0,00060	-0,1462 + 0,0146 i
0,4	-0,03302	-0,06968 i	+0,01842	+0,00309 i	-0,00037	+0,0139 + 0,0403 i
0,5	-0,13103	-0,06550 i	+0,00976	+0,00050 i	+0,00012	+0,0797 + 0,0320 i
0,6	-0,09223	-0,02306 i	-0,00163	-0,00112 i	+0,00021	+0,0598 + 0,0086 i
0,7	-0,00134	+0,01118 i	-0,00507	-0,00070 i	+0,00002	+0,0032 - 0,0070 i
0,8	0,05866	+0,01620 i	-0,00188	+0,00013 i	-0,00006	-0,0364 - 0,0062 i
0,9	0,05451	+0,00381 i	+0,00071	+0,00016 i	0	-0,0346 + 0,0013 i
1,0	0,00869	-0,00318 i	-0,00003	-0,00003 i	0	-0,0052 + 0,0026 i

Wir wollen das allgemeine Ergebnis folgendermaßen zusammenfassen:

Um den Schalldruck der kreisförmigen Kolbenmembran mit dem Radius a im Aufpunkt r, γ nach Amplitude und Phase zu berechnen, wobei $r > a$ vorausgesetzt wird, unterscheiden wir 3 Bereiche:

1. $a < r < \pi a^2/\lambda, \quad \gamma \leq 45^\circ$

2. $a < r < \pi a^2/\lambda, \quad \gamma > 45^\circ$

3. $\pi a^2/\lambda \leq r < \infty, \quad \gamma$ beliebig

und haben im Bereich 1 die Sinus-Entwicklung (58), im Bereich 2 die Cosinus-Entwicklung (35) und im Bereich 3 die r -Entwicklung (21) anzuwenden.

Die abgeleiteten Formeln zeigen nun, daß auch für Schwingungsformen $w(\varrho) = (1 - \varrho^2/a^2)^{p-1}$, wenn $p = 2, 3, \dots$ gesetzt wird, das entsprechende Schallfeld ohne größere Schwierigkeit berechnet werden kann. Durch Superposition sind wir dann in der Lage, auch allgemeine Schwingungsformen der Gestalt¹⁴⁾:

$$w(\varrho) = a_0 + a_1(1 - \varrho^2/a^2) + a_2(1 - \varrho^2/a^2)^2 + \dots + a_n(1 - \varrho^2/a^2)^n$$

der Berechnung zugrunde zu legen.

Schließlich ist noch darauf hinzuweisen, daß die für die Anwendung des Verfahrens geforderte Symmetrie des Strahlungsfeldes auch für eine Strahlergruppe erfüllt ist, deren rotationsymmetrische Einzelstrahler (z. B. vertikale Dipole) vertikal übereinander angeordnet sind.

Als einfachstes Beispiel betrachten wir eine Gruppe von zwei akustischen Strahlern (klein zur Wellenlänge), die im Abstand a auf der Z -Achse angeordnet sind (s. Abb. 3). Dann haben wir die Aufgabe, die Funktion:

$$\Re(r, \gamma) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{r}{r_1} e^{-i\kappa(r-r_1)} + \frac{r}{r_2} e^{-i\kappa(r-r_2)} \right\} \quad (62)$$

nach fallenden Potenzen von r zu entwickeln. In der üblichen Weise würde man r/r_1 und r/r_2 aus:

$$\begin{aligned} \frac{r}{r_1} &= \left(1 + \frac{d}{r} \cos \gamma + \frac{d^2}{4r^2} \right)^{-1/2} \\ \text{und } \frac{r}{r_2} &= \left(1 - \frac{d \cos \gamma}{r} + \frac{d^2}{4r^2} \right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (63)$$

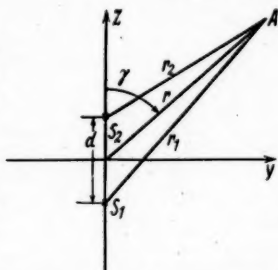


Abb. 3. Zur Berechnung des Schallfeldes der Strahlergruppe

nach dem binomischen Lehrsatz entwickeln, müßte dann die Exponentialfunktionen durch ihre Reihenentwicklungen ersetzen, und die auftretenden Potenzen $(r - r_1)^n$ bzw. $(r - r_2)^n$ durch die sich aus (63) ergebenden Reihen ersetzen und mit den Reihen aus (63) multiplizieren. Das bedeutet eine ziemlich langwierige Rechnung.

Gehen wir dagegen nach unserem Verfahren von:

$$\Re(\infty, \gamma) = \cos\left(\frac{\pi d}{\lambda} \cos \gamma\right) = \cos \alpha z$$

aus, so finden wir die Entwicklungskoeffizienten mit der Abkürzung $\frac{\pi d}{\lambda} = \alpha$, $\cos \gamma = z$ unmittelbar aus:

$$\mathfrak{S}_1(z) = -\alpha [(z^2 - 1) \sin \alpha z]' = \alpha^2 \sin^2 \gamma \cos(\alpha \cos \gamma) - 2\alpha \cos \gamma \sin(\alpha \cos \gamma)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_2(z) &= -\alpha^2 [(z^2 - 1)^2 \cos \alpha z]'' = \alpha^2 \cos(\alpha \cos \gamma) [\alpha^2 \sin^4 \gamma - 12 \cos^2 \gamma + 4] \\ &\quad - 8\alpha^3 \cos \gamma \sin^2 \gamma \sin(\alpha \cos \gamma) \end{aligned}$$

$$\mathfrak{S}_3(z) = \alpha^3 [(z^2 - 1)^3 \sin \alpha z]''' \text{ usw.}$$

¹⁴⁾ Vgl. H. Stenzel, Ann. Physik 7, 972 (1930) u. N. W. McLachlan, Ann. Physik 15, 440 u. ff. (1932), wo die charakteristischen Funktionen $\Re(\infty, \gamma)$ für derartige Schwingungsformen berechnet sind.

Wir beschränken uns auf $\gamma = 90^\circ$, dann ergibt sich: $\mathfrak{S}_0(z) = 1$, $\mathfrak{S}_1(z) = \alpha^2$, $\mathfrak{S}_2(z) = \alpha^2(4 + \alpha^2)$, $\mathfrak{S}_3(z) = \alpha^4(18 + \alpha^2)$ und damit die Entwicklung:

$$\Re(r, 90^\circ) = 1 + i \frac{\pi d^2}{4 \lambda r} - \frac{d^2}{8 r^2} \left(1 + \frac{\pi d^2}{4 \lambda^2}\right) - i \frac{\pi d^4}{64 \lambda r^3} \left(3 + \frac{\pi^2 d^2}{6 \lambda^2}\right) + \dots$$

Dieselbe Entwicklung ergibt sich noch einfacher, wenn wir von

$$\Re(\infty, \gamma) = 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi d}{\lambda}\right)^2 z^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi d}{\lambda}\right)^4 z^4 - \dots$$

ausgehen und nach (34) z^{2n} durch $\frac{(-i)^n (2n)!}{2^n n! (\kappa r)^n} f_n(i \kappa r)$ ersetzen:

$$\begin{aligned} \Re(r, 90^\circ) = & 1 + i \frac{\pi d^2/2 \lambda r}{2 \cdot 1!} \left\{ 1 + i \frac{1 \cdot 2}{2 \kappa r} - \frac{(\pi d^2/2 \lambda r)^2}{2^2 \cdot 2!} \left\{ 1 + i \frac{2 \cdot 3}{2 \kappa r} - \frac{4!}{2 \cdot 4 (\kappa r)^2} \right\} \right. \\ & \left. + i \frac{(\pi d^2/2 \lambda r)^3}{2^3 3!} \dots \right\} \end{aligned}$$

Zusammenfassung

Nach den bisher bekannten Formeln macht die Berechnung des Schallfeldes einer in starrer Wand schwingenden Membran bei stärkerer Bündelung für Aufpunkte in größerer Entfernung erhebliche Schwierigkeiten. Zur Behebung dieser Schwierigkeiten werden in der vorliegenden Arbeit 3 verschiedene Reihenentwicklungen abgeleitet, wobei jede Reihe für einen bestimmten Bereich des Aufpunktes vorteilhaft ist.

Das dazu benutzte Verfahren, welches die Entwicklungskoeffizienten der für den Schalldruck charakteristischen Funktion $\Re(r, \gamma)$ durch eine auf $\Re(\infty, \gamma)$ bzw. $\Re(r, 0)$ ausgeübte Differentialoperation zu berechnen gestattet, ist dabei von wesentlicher Bedeutung und dürfte sich auch für die Berechnung allgemeinerer Strahlungsfelder (akustischer oder elektrischer Art) als nützlich erweisen.

Wolfenbüttel, Post- und Fernmeldetechnisches Zentralamt
des vereinigten Wirtschaftsgebiets.

(Bei der Redaktion eingegangen am 22. November 1948.)

Über eine besondere Form der Zustandsgleichung

Von C. Kämmerer

(Mit 2 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Es wird eine Zustandsgleichung angegeben, die den kritischen Koeffizienten enthält und daher für verschiedene Stoffe auch in dimensionsloser Form verschieden lautet. Dementsprechend ergeben sich aus ihr (auch bei dimensionsloser Auftragung) Dampfspannungskurven mit verschiedener Anfangsneigung, die der wirklichen nahekommt.

Die ursprüngliche Form¹⁾ der betreffenden Zustandsgleichung:

$$p + \frac{a}{v^n} (v - b) = \frac{R T}{v} \quad (1)$$

läßt sich durch Hinzufügen eines Exponenten β von v im Klammerausdruck, wie folgt, ergänzen:

$$p + \frac{a}{v^n} (v^\beta - b) = \frac{R T}{v} \quad (2)$$

Setzt man hierin $(n - \beta) = 2$ und $ab = h$, so erhält man:

$$p = \frac{R T}{v} - \frac{a}{v^2} + \frac{h}{v^n} \quad (3)$$

Hierin bedeuten:

p in kg/m^2 den äußeren Druck.

v in m^3/kg das spezifische oder kg Volumen.

T die abs. Temperatur in $^\circ\text{K}$.

R die spezielle Gaskonstante in m/Grad .

a, h, n aus den kritischen Daten und der Gaskonstante zu bestimmende Festwerte.

p_k [kg/m^2], v_k [m^3/kg] und T_k [$^\circ\text{K}$] die kritischen Daten.

Zur Berechnung der 3 Konstanten a, h und n werden, wie üblich 3 von der kritischen Isotherme ($T = T_k$) im kritischen Punkt ($p = p_k, v = v_k$) zu erfüllende Bedingungen herangezogen und zwar:

1. die Zustandsgleichung

2. Die Beziehung: $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = 0$ (horizontale Tangente im kritischen Punkt)

3. Die Bedingung: $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_T = 0$ (kritischer Punkt = Wendepunkt).

¹⁾ Akademie der Wissenschaften Wien, Akad. Anzeiger Nr. 11, Nov. 1943.

(Wie später gezeigt wird, ist die Einhaltung der 3. Bedingung nicht unbedingt erforderlich).

Nach Einführung der dimensionslosen Kenngröße $x = \frac{p_k v_k}{R T_k}$ (Kehrwert des kritischen Koeffizienten K) erhält man die Festwerte von Gl. (3):

$$\begin{aligned} a &= p_k v_k^2 / (4 x^2 - 1) \\ h &= p_k v_k^3 (1 - 2x)^2 / (4 x^2 - x) \\ n &= 1 / (1 - 2x) \end{aligned}$$

und nach Einführung der reduzierten oder dimensionslosen Drucke, Volumina und Temperaturen, $p_k = p/p_k$, $v_x = v/v_k$ und $T_x = T/T_k$ die dimensionslose Form:

$$p_x = \frac{T_x}{x v_x} - \frac{1}{(4x-1)v_x^2} + \frac{(1-2x)^2}{x(4x-1)v_x^3} \quad (3a)$$

Während sich aus bekannten Zustandsgleichungen nur ein einziger, für alle Stoffe gültiger Wert von x (z. B. $3/8 = 0,375$ bei van der Waals, und $4/15 = 0,267$ bei A. Wohl) ergibt, ist in Gl. (3a) die Kenngröße x mit ihrem wirklichen von Stoff zu Stoff verschiedenen Wert einzusetzen. Wegen

$$x = \frac{p_k v_k}{R T_k} = \frac{p_k v_k m}{848 \cdot T_k}$$

ist neben den kritischen Daten auch das Molekulargewicht m [kg/kmol] als Bestimmungsgröße in Gl. (3a) enthalten.

Auch bei dimensionsloser Auftragung ergeben sich sonach für verschiedene Stoffe verschiedene verlaufende Isothermennetze, so daß das „Gesetz der übereinstimmenden Zustände“ weder für hohe, noch für niedrige Drücke zu Recht besteht. Für große Volumina v_x geht Gleichung (3a) in die dimensionslose Gasgleichung:

$$p_x = \frac{T_x}{x v_x}$$

über.

Gl. (3a) lautet z. B. für Wasserstoff (H_2) mit $x = 0,306$ ($n = 2,578$)

$$p_x = 3,27 \cdot \frac{T_x}{v_x} - \frac{4,465}{v_x^2} + \frac{2,195}{v_x^{2,578}}$$

oder für Kohlensäure (CO_2) mit $x = 0,276$ ($n = 2,23$)

$$p_x = 3,624 \cdot \frac{T_x}{v_x} - \frac{9,62}{v_x^2} + \frac{7}{v_x^{2,23}}$$

Für Stoffe mit $x < 0,25$ wird $(4x-1)$ negativ und die Glieder 2 und 3 der rechten Seite von Gl. (3a) vertauschen ihre Vorzeichen.

So lautet z. B. Gl. (3a):

für Wasser mit $x = 0,225$ ($n = 1,82$)

$$p_x = 4,45 \cdot \frac{T_x}{v_x} + \frac{10}{v_x^2} - \frac{13,45}{v_x^{1,82}}$$

oder für Ammoniak (NH_3) mit $x = 0,243$ ($n = 1,945$)

$$p_x = 4,115 \cdot \frac{T_x}{v_x} + \frac{35,7}{v_x^2} - \frac{38,82}{v_x^{1,945}}$$

Die Kenngröße x bewegt sich etwa in den Grenzen von 0,225 (H_2O) bis 0,327 (Helium). Der nach van der Waals sich ergebende Wert von 0,375 liegt also zu hoch, woraus sich die starken Abweichungen dieser Gleichung besonders für Wasser erklären lassen.

Gl. (3a) stimmt zwar besser mit der Erfahrung überein; doch ist auch bei ihr die Lage des Isothermennetzes z. B. für Wasser nicht befriedigend. So verläuft z. B. die kritische Isotherme für H_2O und höhere Drucke erheblich unterhalb der wirklichen.

Um die Abweichung zu beheben, kann man im kritischen Punkt eine Unstetigkeit der 2. Ableitung zulassen, so daß nur 2 Bedingungen, nämlich:

1. die Zustandsgleichung

2. die Bedingung: $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = 0$ (horizontale Tangente) zu erfüllen sind und der Exponent n von v für $v_x > 1$ und $v_x < 1$ verschieden (jedoch > 2) gewählt werden kann. Die Waagerechte durch den kritischen Punkt bleibt trotzdem eine Wendetangente.

Geht man wieder von Gl. (3) aus, so erhält man die dimensionslose Zustandsgleichung:

$$p_x = \frac{T_x}{x v_x} - \frac{n - x n - 1}{x(n-2) v_x^2} + \frac{(1-2x)}{x(n-2) v_x^2}. \quad (3b)$$

Mit $n = 2^{2/3} = 2,666$ für $v_x > 1$ und $n = 2^{1/6} = 2,1666$ für $v_x < 1$ (Flüssigkeit) ergibt sich z. B. für H_2O mit $x = 0,225$:

$$\text{für } v_x > 1: p_x = 4,45 \cdot \frac{T_x}{v_x} - \frac{7,12}{v_x^2} + \frac{3,67}{v_x^{2,666}} \quad (30)$$

$$\text{für } v_x < 1: p_x = 4,45 \cdot \frac{T_x}{v_x} - \frac{18,12}{v_x^2} + \frac{14,67}{v_x^{2,166}} \quad (31)$$

Für Kohlensäure (CO_2) mit $x = 0,276$ erhält man mit dem Exponenten $n = 2,666$ für $v_x > 1$:

$$p_x = 3,625 \cdot \frac{T_x}{v_x} - \frac{5,055}{v_x^2} + \frac{2,432}{v_x^{2,666}} \quad (35)$$

Die Übereinstimmung der so berechneten Drucke mit den VDI-Wasserdampf-tafeln 1937 für H_2O und einem TvS -Diagramm für CO_2 (Ostertag, Kälteprozesse, II. Auflage 1933) ist aus Zahlentafel 1 ersichtlich.

Zahlentafel 1

Kritische Isotherme von H_2O ($T_k = 647,4^\circ \text{K}$, $v_k = 0,00304 \text{ m}^3/\text{kg}$) $x = 0,225$

$v \text{ m}^3/\text{kg}$	0,056145	0,02521	0,01434	0,00304	0,002209	0,00182
$v_x = v/v_k$	18,46	8,3	4,725	1	0,727	0,6
p_x berechnet	0,22166	0,4461	0,6828	1	1,125	1,32
p berechnet [ata]	49,8	100,2	153,5	225,6	253	297
p nach Tafel [ata]	50,0	100	150	225,6	250	300

Kritische Isotherme von CO_2 ($T_k = 304^\circ \text{K}$, $v_k = 0,002156$) $x = 0,276$

$v \text{ m}^3/\text{kg}$	0,03	0,02	0,015	0,008	0,005	0,002156
$v_x = v/v_k$	13,93	9,29	6,97	3,71	2,308	1
p_x berechnet	0,2362	0,33703	0,4295	0,68445	0,8792	1
p berechnet [ata]	17,75	25,3	32,2	51,3	66,0	75
p nach Tafel [ata]	18,00	26,0	33,0	52,2	66,0	75

Das kritische Volumen v_k wird allerdings verschieden angegeben. So liegt dem für H_2O in Zahlentafel 1 benutzten Wert von $x = 0,225$ ein krit. Volumen $v_k = 0,00304$ zugrunde, (VDI-Wasserdampf tabel 1937). Mit $v_k = 0,0031$ (Hütte, 26. Auflage) wird hingegen $x = 0,2294$ und für $v_x > 1$:

$$p_x = 4,36 \frac{T_x}{v_x} - \frac{6,901}{v_x^2} + \frac{3,541}{v_x^n} \quad (32)$$

Nach dieser Gleichung erhält man z. B. für die kritische Isotherme des Wasserdampfes und $v_x = 4,725$:

$p_x = 0,6615$ oder 150 ata, also genaue Übereinstimmung mit dem Dampftafelwert.

Bei Assoziation nimmt das (scheinbare) Molekulargewicht m zu; gleichzeitig ändern sich aber auch die kritischen Daten, so daß sich zunächst nicht angeben läßt, ob durch die Assoziation auch die Kenngröße $x = \frac{p_k v_k m}{848 T_k}$ beeinflusst wird oder nicht.

Wahrscheinlich ist in Gl. (3a) und (3b) auch das 2. und 3. Glied rechts temperaturabhängig. Vgl. die Zustandsgleichungen von Berthelot, A. Wohl, Beattie u. Bridgman. Diese Abhängigkeit ist jedoch keineswegs einfach und bildet ein Grundproblem der Zustandsgleichung. Dividiert man zunächst das 2. und 3. Glied rechts in Gl. (3b) durch eine Temperaturfunktion $f_x = f(T_x)$, (die für $T_x = 1$ ebenfalls = 1 wird), so ergibt sich:

$$p_x = \frac{T_k}{x v_x} - \frac{1}{f_{1x}} \left(\frac{n-1-xn}{x(n-2)} \frac{1}{v_x^2} \right) + \frac{1}{f_{2x}} \left(\frac{1-2x}{x(n-2)} \frac{1}{v_x^n} \right) \quad (3c)$$

Nun muß bekanntlich im $p_x T_x$ -Diagramm bei $v_x = 1$ und $T_x = 1$ die Tangente an die Dampfspannungskurve gleichzeitig auch die $v_x = \text{konstant}$ -Linie oder Isovolume ($v_x = 1$) tangieren. Der aus der Zustandsgleichung sich ergebende Wert des Differentialquotienten:

$$\left(\frac{\partial p_x}{\partial T_x} \right)_{v_x=1} = \text{tg } \alpha \quad \text{muß also gleich} \quad \left(\frac{dp_{sx}}{dT_{sx}} \right)_{T_{sx}=1}$$

sein, wenn mit p_{sx} und T_{sx} die dimensionslosen oder reduzierten Sattedampfdrucke und -Temperaturen bezeichnet werden.

Die Anfangsneigung ($\text{tg } \alpha$) der Dampfdruckkurve im $p_x T_x$ -Diagramm läßt sich daher durch Differenzieren aus der Zustandsgleichung berechnen.

Setzt man nun in Gl. (3c) für den kritischen Punkt als erste Näherung:

$$f_{1x} = f_{2x} = T_x,$$

so wird:

$$\left(\frac{\partial p_x}{\partial T_x} \right)_{T_x=1} = \text{tg } \alpha = \frac{1}{x} + \left(\frac{n-1-xn}{x(n-2)} \right) - \frac{1-2x}{x(n-2)} \quad (4)$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{2}{x} - 1 = 2K - 1,$$

da $\left(\frac{\partial f_x}{\partial T_x} \right)_{T_x=1} = 1$ ist. Auf $\text{tg } \alpha$ hat also in diesem Fall die Wahl des Exponenten n keinen Einfluß. ($K = \text{kritischer Koeffizient} = 1/x$).

Die wirkliche Anfangsneigung der Dampfdruckkurve gegen die Abszissenachse kann man andererseits aus einem Schaubild Abb. 1 (nach W. Schüle, Technische Thermodynamik, II. Auflage, II. Bd. S. 80 Fig. 34) entnehmen, in welchem $\log 1/p_{sx}$ über $(1/T_{sx} - 1)$ als Abszisse aufgetragen ist.

Nach der bekannten Dampfdruckformel:

$$\log(1/p_{sx}) = M(1/T_{sx} - 1) \quad (5)$$

erhält man sonach, da M für einen bestimmten Stoff ein Festwert bleibt, durch den Ursprung gehende Gerade oder Strahlen, deren Neigungswinkel gegen die Abszissenachse durch die Beziehung: $\tan \delta = M$ gegeben ist. Nach Gl. (5) ist:

$$p_{sx} = e^{M(1 - \frac{1}{T_{sx}}) \cdot 2,3026}$$

und

Abb. 1. Dampfdruckkurven nach Schüle

$$\frac{dp_{sx}}{dT_x} = e^{M(1 - \frac{1}{T_{sx}}) \cdot 2,3026} \cdot M \cdot 2,3026 \left(\frac{1}{T_{sx}^2}\right), \quad (5a)$$

für $T_x = 1$ wird schließlich:

$$\left(\frac{dp_{sx}}{dT_x}\right)_{T_x=1} = \tan \alpha = 2,3026 M = 2,3026 \tan \delta. \quad (5b)$$

In Zahlentafel 2 sind die nach Gl. (4) aus der Zustandsgleichung berechneten Werte von $\tan \alpha$ den aus Abb. 1 entnommenen gegenübergestellt.

Zahlentafel 2 zu Abbildung 2

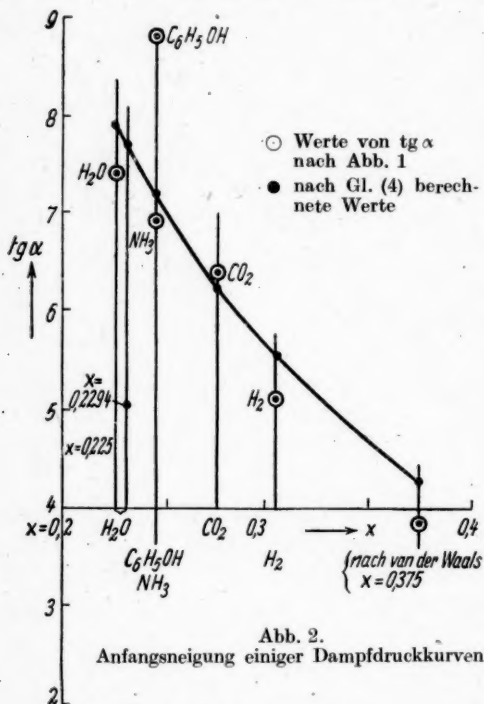
	H ₂	CO ₂	NH ₃	$v_k = 0,00304$ H ₂ O	0,0031 H ₂ O	C ₆ H ₅ OH
$x = \frac{1}{K} = \frac{p_k v_k m}{848}$	0,306	0,276	0,243	0,225	0,2294	0,244
$K = 1/x$	3,27	3,620	4,12	4,45	*4,35	4,10
Atomzahl	2	3	4	3	3	13
$\tan \alpha$ berechn. nach Gl. (4)	5,54	6,248	7,235	7,9	7,72	7,2
$\tan \alpha$ aus Abb. 1	5,11	6,4	6,91	7,4	7,4	8,8

Für van der Waalssche Stoffe mit $x = 0,375$ wäre $\tan \alpha$ nach Abb. 1 = 3,86, während sich nach Gl. (4) ein höherer Wert, nämlich 4,299 ergeben würde.

Die errechneten Werte von $\tan \alpha$ stimmen mit den gemessenen nur annähernd überein; doch ist der Gang beider Reihen der gleiche (siehe Abb. 2) und der Vorteil

unverkennbar, den die Einführung der wirklichen von Stoff zu Stoff verschiedenen Kennzahlen x in die Zustandsgleichung mit sich bringt.

Aus Abb. 2 geht ferner hervor, daß die Neigung der Dampfdruckkurve zwar im wesentlichen von der Kennzahl x , jedoch außerdem noch von einem zweiten



ist anzunehmen, daß sich auch f_{1x} und f_{2x} unterhalb dieser Temperatur nicht mehr wesentlich ändern. Auf die weitere Bestimmung der Temperaturfunktionen in Gl. (3c) kann aber hier nicht eingegangen werden.

Wien 14/89, Penzingerstr. 45.

(Bei der Redaktion eingegangen am 17. Juni 1944.)

Parameter (wie etwa der Atomzahl) abhängen muß, da 2 Stoffe mit gleichem x (Alkohol und Ammoniak) verschieden geneigte Dampfdruckkurven zeigen.

Natürlich kann man durch Verwendung anderer Temperaturfunktionen (z. B. $T_x^a + bT_x^c$ usw.) auch genaue Übereinstimmung von $\text{tg } \alpha$ (berechnet) mit $\text{tg } \alpha$ (gemessen) erzielen. In erster Linie sind aber f_{1x} und f_{2x} so zu bestimmen, daß das resultierende Isothermennetz für $T_x \geq 1$ mit dem wirklichen möglichst genau zusammenfällt. f_{1x} und f_{2x} müssen ferner wegen des Nernstschen Wärmesatzes bei $T_x = 0$ eine waagerechte Tangente haben. Da der Satteldampfdruck für alle Stoffe bei einer gewissen Temperatur (z. B. der Schmelztemperatur ($T_x = 0.422$) bei H_2O) verschwindet, d. h. konstant wird,

Über streng punktförmige Elementarladungen

• Eine Bemerkung zur klassischen Elektronentheorie

Von Erich Kretschmann

Inhaltsübersicht

Es wird gezeigt, wie die einfache Annahme streng punktförmiger Elementarladungen mit den Erhaltungssätzen von Energieimpuls und Drehimpuls in Einklang gebracht werden kann und auf die wichtigsten Folgerungen hingewiesen, die sich aus der damit vorgeschlagenen Abänderung der Elektronentheorie ergeben.

Die klassische Elektronentheorie leidet an der inneren Unstimmigkeit, daß einerseits die tatsächliche Unteilbarkeit aller Elementarladungen vorausgesetzt, andererseits aber jede dieser Ladungen auf ein endliches Gebiet verteilt gedacht wird und Wechselwirkungskräfte zwischen ihren Teilen als bestehend angenommen werden¹⁾.

Die vorliegende Bemerkung soll kurz darauf hinweisen, daß man diesen Mißstand und die mit ihm verbundenen Scheinprobleme ohne Verletzung der Erhaltungssätze von Energie und Impuls durch eine einfache und naheliegende Änderung der bisher für diese Größen als gültig angenommene Ausdrücke beseitigen kann.

Es genügt, die Felder zweier Elementarladungen e_1 , h_1 und e_2 , h_2 , und das aus ihnen nach dem Superpositionsprinzip zusammengesetzte Gesamtfeld $e = e_1 + e_2$, $h = h_1 + h_2$ zu betrachten.

Die Feldgleichungen sind linear in allen Feldkomponenten und gelten einzeln für das Feld (1) wie für das Feld (2) wie für das Gesamtfeld bei beliebig vorgegebener, etwa durch irgendwelche nicht elektromagnetische Kräfte bewirkter, Bewegung und Verteilung der Ladungen.

Aus den Feldgleichungen folgen die Erhaltungssätze von Energie und Impuls und gelten demnach ebenfalls bei beliebiger Bewegung und Verteilung der Ladungen einzeln für die erste wie für die zweite Ladung, jede mit ihrem Felde, wie für beide Ladungen zusammen mit dem Gesamtfelde.

Die Erhaltungssätze haben alle die Form

$$-\operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{\partial u}{\partial t} + q \quad (1)$$

¹⁾ Zur Zeit der Entstehung der Elektronentheorie, nach der makroskopischen Elektrodynamik und vor der Einsteinschen Relativitätstheorie und der Bohrschen Theorie der Atomspektren, mußte natürlich eine endliche Ausdehnung der Elementarladungen mit elektromagnetischer Rückwirkung auf sich selbst als unvermeidbar erscheinen. Denn nur so konnte scheinbar eine unendliche Eigenenergie der Elektronen vermieden und zugleich die beobachtete Abhängigkeit ihrer trägen Masse von der Geschwindigkeit erklärt werden. S. M. Abraham: Theorie der Elektrizität II, 3. Kap., § 16, S. 139 (1905).

des Energiesatzes und jedes Glied in ihnen ist vom zweiten Grade in den Feldkomponenten und der neben diesen in den Feldgleichungen linear auftretenden Ladungs- und Stromdichte. So ist im Beispiel der Energiegleichung

$$\mathcal{E} = \frac{c}{4\pi} [e, h], \quad u = \frac{1}{8\pi} \{e^2 + h^2\} \quad \text{und} \quad q = (e, \varrho v) \quad \text{mit} \quad 4\pi \varrho = \operatorname{div} e.$$

Jedes Glied der Gleichungen zerfällt infolge der Zweiteilung:

$$e = e_1 + e_2, \quad h = h_1 + h_2, \quad \varrho = \varrho_1 + \varrho_2$$

in drei Teile, von denen der erste nur Feld und Ladungsdichte des ersten Teilchens, der zweite dieselben Daten des zweiten, und der dritte nach dem Schema (1) · (2) + (2) · (1) die beider Teilchen enthält.

Die Glieder der ersten zwei Teile erfüllen nach dem Gesagten die Erhaltungsgleichungen für sich allein, und folglich tun die dritten Teilglieder, die Wechselwirkungsglieder, wie ich sie nennen will, dasselbe. Der Energiesatz gilt also auch in der Form:

$$-\operatorname{div} \left[\frac{c}{4\pi} \{[e_1, h_2] + [e_2, h_1]\} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi} \{(e_1, e_2) + (h_1, h_2)\} \right] + (e_1, \varrho_2 v_2) + (e_2, \varrho_1 v_1). \quad (2)$$

Dieser, gewiß nicht neue, Schluß läßt sich ohne weiteres von zwei auf $n \geq 2$ Elementarladungen übertragen. Denn streicht man aus den für das Ganze aufgestellten Erhaltungsgleichungen alle aus Feld, Ladungs- und Stromdichte je eines Teilchens aufgebauten Glieder, die Eigenglieder, so erfüllen wie diese auch die zurückbleibenden, bei großem n viel zahlreicheren „Wechselwirkungsglieder“ die Erhaltungssätze für sich allein. Dabei treten als Dichte des Energiestromes, der Energie und der Arbeitsleistung der Wechselwirkung statt der Ausdrücke in (2) auf:

$$\mathcal{E} = \frac{c}{4\pi} \sum_{l \neq k}^{l,k} [e_l, h_k], \quad u = \frac{1}{8\pi} \sum_{l \neq k}^{l,k} \{(e_l, e_k) + (h_l, h_k)\}, \quad q = \sum_{l \neq k}^{l,k} (e_l, \varrho_k v_k). \quad (3)$$

Ganz entsprechend sind in der Erhaltungsgleichung z. B. der x -Komponente des Impulses der Wechselwirkung

$$\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial g_x}{\partial t} + \mathfrak{F}_x \quad (1a)$$

die Spannungskomponenten und die Kraftdichte aus den bekannten Ausdrücken dieser Größen für ein einheitliches Feld zu entnehmen:

$$T_{xx} = \frac{1}{4\pi} \sum_{l \neq k}^{l,k} \{e_{lx} e_{kx} + h_{lx} h_{kx}\} - u, \quad T_{xy} = T_{yx} = \frac{1}{4\pi} \sum_{l \neq k}^{l,k} \{e_{lx} e_{ky} + h_{lx} h_{ky}\} \quad (3a)$$

$$\mathfrak{F} = \sum_{l \neq k}^{l,k} \left\{ \varrho_l e_k + \frac{\varrho_l}{c} [v_l, h_k] \right\}, \quad (3b)$$

während $g = \mathcal{E}/c^2$ die Impulsdichte ist.

Man kann die Doppelsummen hier leicht durch einfache Summen ersetzen, wenn man das „äußere“ Gesamtfeld einführt, das auf die l -te Elementarladung wirkt:

$$\mathcal{E}_l = \sum_{k \neq l} e_k = \mathcal{E} - e_l, \quad \mathfrak{H}_l = \sum_{k \neq l} h_k = \mathfrak{H} - h_l, \quad (4)$$

das wäre also das Feld schlechthin, das man mit der l -ten Elementarladung als Probekörper mißt. Mit diesem wird:

$$\begin{aligned}\mathfrak{E} &= \frac{c}{4\pi} \sum^l [e_l, \mathfrak{H}_l] = \frac{c}{4\pi} \sum^l [\mathfrak{E}_l, \mathfrak{H}_l], \quad u = \frac{1}{8\pi} \sum^l \{ (e_l, \mathfrak{E}_l) + (\mathfrak{H}_l, \mathfrak{H}_l) \} \\ q &= \sum^l (\mathfrak{E}_l, \varrho_l \mathbf{v}_l), \quad \mathfrak{F} = \sum^l \left\{ \varrho_l \mathfrak{E}_l + \frac{\varrho_l}{c} [\mathbf{v}_l, \mathfrak{H}_l] \right\} \\ T_{xx} &= \frac{1}{4\pi} \sum^l \{ e_{lx} \mathfrak{E}_{lx} + \mathfrak{H}_{lx} \mathfrak{H}_{lx} \} - u, \quad T_{xy} = \frac{1}{4\pi} \sum^l \{ e_{lx} \mathfrak{E}_{ly} + \mathfrak{H}_{lx} \mathfrak{H}_{ly} \}.\end{aligned}\quad (5)$$

Man sieht an diesen Ausdrücken besonders leicht, daß sie da, wo es auf das Feld einer einzelnen Elementarladung nicht ankommt, oder

$$\mathfrak{E}_l = \mathfrak{E} = \sum^l e_l \quad \text{und} \quad \mathfrak{H}_l = \mathfrak{H} = \sum^l \mathfrak{H}_l$$

gesetzt werden darf, in die altgewohnten Formen übergehen.

Aus der differentiellen Form (1a) des Impulssatzes folgt, da der Spannungstensor symmetrisch ist, der Drehimpulssatz in Integrallform ²⁾.

Die angegebenen und hiermit zur Annahme vorgeschlagenen Ausdrücke (3) und (5) erfüllen also alle Erhaltungssätze von Energie, Impuls und Drehimpuls, und zwar in der Weise, daß alle Beiträge zu diesen Größen, die inneren Kräften zwischen gedachten Teilen je einer Elementarladung zugeschrieben werden müßten, aus dieser Bilanz der elektromagnetischen Energie und Bewegungsgröße einfach gestrichen sind. Es gibt nach dieser Auffassung keine Rückwirkung des elektrischen oder magnetischen Feldes einer Elementarladung auf diese selbst, keine elektromagnetische „Eigenenergie“ oder „eigene“ Bewegungsgröße.

Alles Gesagte gilt unabhängig von Gestalt und Größe der Elementarladungen. Für die Elektronentheorie als solche ist es bei Annahme der Gleichungen (3) oder (5) das einfachste und methodisch allein Richtige, die unteilbaren Elementarladungen als streng punktförmig zu behandeln und ihnen rein mechanische Massen zuzuschreiben ³⁾.

Dabei kann man für das Feld der einzelnen, l -ten, Elementarladung die gewöhnlichen Feldgleichungen beibehalten.

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathfrak{H}_l &= \frac{1}{c} \frac{\partial e_l}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \varrho_l \mathbf{v}_l, \quad \text{div } \mathbf{e}_l = 4\pi \varrho_l \\ \text{rot } \mathbf{e}_l &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_l}{\partial t}, \quad \text{div } \mathfrak{H}_l = 0\end{aligned}\quad (6)$$

und braucht nur die Gleichung

$$\varrho_l = e_l \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l) \quad (6a)$$

für die Ladungsdichte der am Orte \mathbf{r}_l befindlichen Elementarladung hinzuzufügen. $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l)$ ist die bekannte, uneigentliche Dirac-Funktion ⁴⁾. Dieselben Gleichungen gelten dann natürlich auch für das Gesamtfeld $\mathfrak{E} = \sum^l \mathbf{e}_l$, $\mathfrak{H} = \sum^l \mathfrak{H}_l$ mit $\varrho = \sum^l \varrho_l$, wobei $\mathbf{v} = \mathbf{v}_l$ an den Ladungsarten ($\varrho_l \neq 0$) ist.

²⁾ M. Abraham, Theorie der Elektrizität II, § 5, S. 34 (1905).

³⁾ Integriert man die Energiedichte u nach (5) über den von einer Elementarladung eingenommenen Raum, so erhält man eine vom äußeren Felde abhängige Größe, die für punktförmige Ladung gleich Null ist, wie man sofort sieht.

⁴⁾ Das heißt $\int d\mathbf{r} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l)$ ist gleich 1 oder 0, je nachdem das Integrationsgebiet den Ort \mathbf{r}_l enthält oder nicht.

Felder, die von keiner Elementarladung herrühren, sind hierbei ausgeschlossen⁵⁾.

Zum Schluß sei ganz kurz auf zwei ungewohnte Folgerungen aus den neuen Ausdrücken (3) und (5) hingewiesen.

Erstens kann nach (3) die Energiedichte des Feldes ebensogut negativ wie positiv sein, statt definitiv positiv bisher. Das kommt daher, daß das Raumintegral der neuen Feldenergie nur die Arbeit darstellt, die nötig ist, um alle Elementarladungen an ihre Plätze und in ihren Bewegungszustand zu bringen, während in dem gewohnten Ausdruck der Feldenergie noch die zur Zusammensetzung der einzelnen Elementarladung aus infinitesimalen Teilen erforderliche Arbeit enthalten ist, die physikalisch unmöglich ist.

Zweitens gehören nach (3) zur Aussendung von Strahlungsenergie stets mindestens zwei Elementarladungen, und zwar müssen beide beschleunigt sein. Denn ruht die eine, e_1 , im mitbewegten Bezugssystem dauernd, so fließt der Energiestrom, den ihr rein elektrisches und radiales Feld mit dem einer zweiten Ladung e_2 erzeugt, nach (3) nur längs der um e_1 beschriebenen Kugelflächen. Bei Bewegung von e_2 z. B. auf einer Ellipse um den festgehaltenen Brennpunkt e_1 würde also e_2 nur aus dem Gebiete zwischen den durch Perihel und Aphel gelegten Kugeln Energie abwechselnd aufnehmen, und wieder dahin abgeben, und zwar im Maße der von der Anziehungskraft bzw. gegen sie geleisteten Arbeit.

Die Bewegung eines Elektrons auf einer Bohrschen Bahn ist hiernach bei festgehaltenem Kern strahlungsfrei⁶⁾.

Überhaupt fällt nach (3) alle inkohärente Eigenstrahlung einzelner Elementarladungen fort. Dieses Erscheinungsgebiet ist damit von vornherein aus der klassischen Elektronentheorie ausgeschlossen und der Quantentheorie zugewiesen.

Dagegen bleibt die Arbeitsleistung bestehen, die das Wellenfeld jeder schwingenden Elementarladung an jeder anderen leistet, die es in Bewegung setzt. Den Ausgleich für diese Arbeit bildet die (negative) Interferenzenergie der Felder beider Ladungen. Das ist auch in der gewohnten Darstellung nicht anders. Nur wird in dieser der Vorgang wieder verdeckt durch die Eigenenergien der Ladungen, die an ihm nicht mitwirken, aber durch ihre bloße Überlagerung über die Interferenzenergie die Feldenergie überall positiv machen.

Makroskopische Ladungen und Ströme behalten, wie schon bei Gl. (5) gesagt, praktisch ihre alten Feldenergiewerte. Im Geltungsbereich der klassischen Elektrodynamik wird also durch die neuen Ausdrücke nichts geändert.

⁵⁾ Dies käme noch ausgeprägter zur Darstellung, wenn man als Grundgesetz die Liénard-Wiechertschen Gleichungen für die elektromagnetischen Potentiale der Elementarladungen und die Definitionen der Feldgrößen durch sie aufstellte.

⁶⁾ Auch nach der bisherigen Theorie strömt, wenn das Elektron auf einer elliptischen Spiralbahn den ruhenden Kern umkreist, die Wechselwirkungsenergie des Feldes gemäß 3. abwechselnd in das Elektron und aus ihm heraus, nur jetzt überwiegend hinein, genau im Maße der überwiegend positiven Arbeitsleistung des Kernfeldes an dem Elektron. Zugleich leistet das hemmende eigene Feld an dem Elektron negative Arbeit und das Äquivalent dieser Arbeit wird als Eigenstrahlungsenergie ausgesandt. Dieser zweite Vorgang ist aber unabhängig von dem ersten. Denn wenn man mittels mechanischer Kraft das Elektron unbeschleunigt dem Kerne nähert, so fällt die Strahlung fort, und es bleibt nur das Einströmen von Feldenergie in das Elektron gemäß 3. übrig nebst ihrer Umwandlung in mechanische Arbeit.

Halle (Saale), Institut für theoretische Physik.

(Bei der Redaktion eingegangen am 10. Dezember 1948.)

Eindringtiefe magnetischer Felder in Supraleiter und Metallabsorption

Von F. Möglich und R. Rompe

(Mit 2 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Es wird ein Zusammenhang aufgezeigt zwischen der Eindringtiefe magnetischer Felder bei der Supraleitung und der Grenzwellenlänge eines Absorptionsgebietes des betreffenden Metalles im kurzwelligen Teil des Sichtbaren. Ferner wird gezeigt, daß die Stärke der Absorption dieses Gebietes von der linearen Ausdehnung der Metalle sehr stark abhängt, und zwar mit geringer werdender Ausdehnung zunimmt. Am experimentellen Material, bei Silber, Quecksilber und anderen Metallen wird der Nachweis geführt, daß ein solches Absorptionsgebiet wirklich existiert und die Eigenschaft der Abhängigkeit von der Schichtdicke usw. besitzt. Mit Hilfe der neuesten Messungen über die Eindringtiefe magnetischer Felder in Supraleiter wird gezeigt, daß dieses Absorptionsgebiet gerade an der Stelle liegt, wo die Plasmaschwingungen nach der Theorie zu erwarten sind.

1. Einleitung

Nach der phänomenologischen Theorie der Supraleitung Londons und von Laues¹⁾ steht die Eindringtiefe magnetischer Felder in Supraleiter in folgender Beziehung zur Elektronendichte:

$$\beta^{-1} = \frac{c \cdot m^{\frac{1}{2}}}{2 e \pi^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}}}$$

In dieser Gleichung ist n die Konzentration der freien Elektronen, m die Elektronenmasse und e die Elementarladung. Man hat also die Möglichkeit, aus der Elektronenkonzentration auf die Eindringtiefe magnetischer Felder zu schließen.

Über die Eindringtiefe magnetischer Felder bei der Supraleitung liegen aus letzter Zeit zuverlässige Messungen vor, die nach verschiedenen Verfahren durchgeführt wurden. Untersuchungen von Shoenberg²⁾ basieren auf der experimentellen Bestimmung der magnetischen Suszeptibilität von Suspensionen supraleitender Metalle, die zum mindesten für Quecksilber Vertrauen verdienen. Aus ihnen geht zunächst hervor, daß die Eindringtiefe bei Annäherung an den Sprungpunkt über alle Grenzen wächst. Bei tieferen Temperaturen strebt der Wert der Eindringtiefe sehr schnell einem Grenzwert zu, den man als den Wert der Eindringtiefe bei 0° K ansehen kann. Er ist bei Sn und Hg bei 2,3° K praktisch schon erreicht. Shoenberg findet Werte von ungefähr $7 \cdot 10^{-6}$ cm, während Pippard³⁾

¹⁾ Vgl. z. B. M. v. Laue, Theorie der Supraleitung, Berlin und Göttingen, 1947.

²⁾ D. Shoenberg, Nature **143**, 434 (1939); Proc. Roy. Soc. London (A) **175**, 49 (1940); M. Desirant, D. Shoenberg, Nature **159**, 201 (1947).

³⁾ A. B. Pippard, Nature **159**, 434 (1947); Proc. Roy. Soc. London (A) **191**, 399 (1947).

aus Untersuchungen des Skineffektes für Zinn und Quecksilber den Wert $7,2 \cdot 10^{-6}$ cm herleitet, welcher demnach in guter Übereinstimmung mit dem von Shoenberg gefundenen steht. Setzt man nun in die Formel für die Eindringtiefe plausible Werte für die Elektronendichte in Metallen ein, so erhält man Ergebnisse, die etwa um den Faktor 3,5 kleiner sind als die eben zitierten experimentellen Werte.

Man könnte sich auf den Standpunkt stellen, daß bei dem heutigen Stand der Entwicklung der Theorie der Supraleitung eine bessere Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment nicht zu erwarten sei. Wir möchten jedoch versuchen zu zeigen, daß wir eine Diskrepanz genau des gleichen zahlenmäßigen Betrages vorweisen können an einer Erscheinung, welche normalerweise nicht mit dem Phänomen der Supraleitung in Verbindung gebracht wird, nämlich der Metallabsorption im kurzwelligen sichtbaren und langwelligen Teil des ultravioletten Spektrums. Hierbei greifen wir zurück auf Vorstellungen über das Zustandekommen der Supraleitung, die wir in zwei Arbeiten ⁴⁾ (im Folgenden mit I und II bezeichnet) bereits an gleicher Stelle veröffentlicht haben, und aus denen sich ein einfacher Zusammenhang zwischen der Eindringtiefe magnetischer Felder bei der Supraleitung und der Lage eines bestimmten Teiles der Absorption des betreffenden Metalles herleiten läßt.

Es wird allgemein die Auffassung vertreten, daß die Absorption des kompakten Metalles durch zwei wesensverschiedene Mechanismen bestimmt wird, die zu zwei spektral aneinander anschließenden, aber doch immerhin gut abgesetzten Spektralgebieten Anlaß geben. Im Rahmen der Bändervorstellung wird das langwelligere Absorptionsgebiet gedeutet als Übergang der Elektronen im gleichen Band, wobei die Auswahlregeln für die Impulse durch Wechselwirkung mit den Schallquanten erfüllt werden. Dies ist auch das Gebiet der „klassischen“, mit der elektrischen Leitfähigkeit eng zusammenhängenden Absorption, deren wesentliches Kennzeichen darin besteht, daß sie ebenso wie der elektrische Widerstand mit abnehmender Temperatur verschwindet. Kurzwelliger liegt die Absorption, die dem Übergang eines Elektrons aus dem Leitfähigkeitsbande in ein höheres Energieband zuzuschreiben ist. Diese ist grundsätzlich nicht temperaturabhängig, da sie auch ohne Wechselwirkung mit Schallquanten möglich ist. Sie wird im Folgenden kurz Band-Band-Absorption genannt.

Es ist zuerst wohl von Steenbeck ⁵⁾ darauf hingewiesen worden, daß die Ultraviolettabsorption der meisten Metalle etwa an der Stelle liegt, wo unter Zugrundelegung der Langmuirschen Formel für die Plasmaschwingungen eines Elektronengases die kleinste Eigenfrequenz der Leitungselektronen eines Metalles liegen könnte. Wir haben schon früher ⁶⁾ die Ansicht geäußert, daß damit ein dritter, von den beiden obengenannten unabhängiger Mechanismus der Absorption durch die Leitungselektronen eines Metalles gegeben ist. Hierbei blieb zunächst einmal die Frage offen, ob die experimentellen Untersuchungen Raum lassen für den Einfluß eines solchen dritten Mechanismus und ob überhaupt die Oszillatorenstärken der Plasmaabsorption nennenswerte Beträge erreichen können.

In sehr sorgfältigen Untersuchungen hat Wolter ⁷⁾ auf Grund von Messungen von Goos zeigen können, daß im kurzwelligen sichtbaren Gebiet eine Zunahme

⁴⁾ F. Möglich, R. Rompe, Ann. Physik (6) 1, 27 (1947); 3, 322 (1948).

⁵⁾ M. Steenbeck, Z. Physik 76, 260 (1930).

⁶⁾ F. Möglich, R. Rompe, l. c.

⁷⁾ H. Wolter, Z. Physik 105, 269 (1937).

der Absorption mit kleiner werdender Schichtdicke des Metalles auftritt. Dieser Absorption hat man offenbar bisher keine wesentliche Bedeutung beigemessen, um so mehr wohl, weil bei mittleren Schichtdicken sich auch im ultraroten Gebiet eine Zunahme der Absorption feststellen läßt, die allerdings bei abnehmender Schichtdicke wieder zu verschwinden scheint. In jüngster Zeit hat auf Anregung der Verfasser in diesem Zusammenhang E. Havemann die Absorption verschiedener Metalle in kolloidalen Lösungen untersucht. Die Metalle zeigen übereinstimmend eine selektive Absorption im kurzwelligen sichtbaren Gebiet, die in voller Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Wolter steht. Bei Ag und Hg beginnt bei ungefähr 3600 Å ein Abfall der Absorption, der bei Ag nach einem deutlichen Minimum bei 3500 Å in einen Wiederanstieg des Absorptionskoeffizienten übergeht. Dieser Anstieg ist ziemlich steil. Im Gegensatz hierzu verhält sich Quecksilber anders. Der Abfall der Absorption, der etwas kurzwelliger liegt, ist sehr steil und führt dazu, daß unterhalb von 3000 Å das Quecksilbersol vollständig durchlässig wird. Von einem Wiederanstieg der Absorption ist bis zu 2700 Å nichts zu merken.

Unserer Auffassung nach sprechen diese Befunde beinahe zwingend dafür, den Mechanismus der Plasmaschwingungen für das bei kleinen Schichtdicken bzw. Partikelgrößen auftretende Absorptionsmaximum verantwortlich zu machen. Bei Silber und Quecksilber liegt dieses Maximum zwischen 4800 und 3400 Å, auf der langwelligen Seite verfälscht durch die sogenannte klassische Absorption des Elektronengases. Der Wiederanstieg der Absorption beim Silber im Ultraviolett dürfte wohl der Band-Band-Absorption zuzuschreiben sein. Jedenfalls stimmt die Lage dieser Absorption mit der überein, die man bisher bei Ag den Band-Band-Übergängen zugeschrieben hat. Es hat also damit den Anschein, daß tatsächlich das Spektrum eines Metalles durch das Zusammenwirken dreier Mechanismen bestimmt wird, von denen der dritte, bisher nicht beachtete, offenbar die Plasmaschwingungen sind.

Auf Grund der theoretischen Überlegungen in I und II können wir die Absorptionsstärke dieser Plasmaschwingungen abschätzen. Es ergibt sich, daß bei Schichten normaler Dicke die Absorption nicht zustande kommt, weil eine Impulsbehinderung auftritt. Diese Impulsbehinderung wird dadurch hervorgerufen, daß die Plasmaschwingungen, verglichen mit den elektromagnetischen Wellen, bei gleicher Frequenz immer einen kleineren Impuls haben als die elektromagnetischen Wellen und daß daher die gleichzeitige Erfüllung eines Energie- und Impulserhaltungssatzes unmöglich ist. Es zeigt sich jedoch, daß der Impulserhaltungssatz mit um so geringerer Genauigkeit zu gelten hat, je kleiner die lineare Ausdehnung der metallischen Schichten ist. Während die Stärke der Absorption dieser Plasmaschwingungen nur $\frac{1}{10}$ — $\frac{1}{20}$ der Band-Band-Absorption der Metalle beträgt, wenn die Schichtdicken 10^{-5} cm überschreiten, kann die Plasmaabsorption die Band-Band-Absorptionsstärke erreichen, wenn die Ausdehnung des Metalls beträchtlich kleiner als 10^{-5} cm ist. Ein Blick auf die Abb. 1 zeigt, daß diese Verhältnisse in der Natur gerade realisiert sind^{*)}.

^{*)} Bei dieser Deutung der Versuchsergebnisse erscheint uns besonders befriedigend die Tatsache, daß die Band-Band-Absorption von Silber und Quecksilber hinsichtlich der spektralen Lage beträchtliche Unterschiede zeigt. Es mag darauf hingewiesen werden, daß ja die Ionisierungsspannung der Atome von Hg und Ag sich ebenfalls beträchtlich unterscheiden (7,54 Volt bei Ag und 10,4 Volt bei Hg). Auch zeigen die Resonanzspannungen ein entsprechendes Verhalten. Bei Silber liegt die Resonanzspannung bei 3,7 Volt und bei Quecksilber bei 4,86 Volt.

Auf die Anomalien der Absorption im Bereich der sichtbaren Strahlung im Zusammenhang mit den Absorptionsmessungen von Goos hat übrigens auch David⁹⁾ hingewiesen. Er macht bereits den Versuch, die vom bisherigen Standpunkte der Festkörperphysik aus nicht zu erklärende Absorption auf gewisse Eigenschwingungen im sichtbaren und ultraroten Gebiet zurückzuführen. Seine Untersuchungen sind aber nicht so überzeugend wie die Rechnungen von Wolter, auf die wir schon hingewiesen haben und die den Effekt der kurzwelligen sichtbaren Absorption ganz eindeutig unter Beweis stellen.

Die Untersuchungen von David haben dann H. Jensen¹⁰⁾ veranlaßt, der Frage nach der Herkunft der von David geforderten Eigenschwingungen nachzugehen. Jensen basiert bei seinen Untersuchungen auf einer Arbeit von Bloch¹¹⁾, der wohl erstmalig darauf hingewiesen hat, daß bereits ein normales Atom durch die Möglichkeit der Schwingung seiner elektrischen Dichte zu Schwingungen befähigt sein muß. Bloch benutzt diesen Gedanken, um die Bremsfähigkeit schwerer Atome gegenüber Korpuskularstrahlung zu berechnen, indem er die Energieübertragung auf diese Schwingungen bei der Bremsung von Partikeln berücksichtigt¹²⁾.

Jensen untersucht das dynamische Gleichgewicht eines Fermischen Atoms, wobei er sich allerdings im wesentlichen darauf beschränkt, die Schwingungen der Dichte in einem solchen Gasplasma zu berechnen, während ihm die Existenz der transversalen Schwingungen entgeht. Er wendet seine Überlegungen ausdrücklich auf die Schwingungen an, die bei kleinen Metallkugeln zu erwarten sind, wobei er sich auf den Fall konstanter räumlicher Elektronendichte beschränken muß. Er findet im wesentlichen eine Bande von für die Absorption in Frage kommenden Eigenschwingungen im Grenzgebiet zwischen dem Ultravioletten und Sichtbaren.

Wie wir im Laufe der Arbeit zeigen wollen, wird gerade die langwellige Kante der Plasmaabsorption in Beziehung gesetzt werden müssen zur Eindringtiefe magnetischer Felder im supraleitenden Zustand. Es würde also alles darauf ankommen, eine möglichst genaue Angabe über die Lage dieser langwelligen Absorptionskonstante auf Grund des experimentellen Materials zu machen. Das ist aber, wie ein Blick auf die Abb. 1 zeigt, heute noch nicht möglich, weil das Material noch zu spärlich ist. Auch macht die Überdeckung durch die Vorgänge im Ultraroten, die, wie es den Anschein hat, nur zum Teil auf der klassischen Absorption des Elektronengases beruhen, eine genauere Abschätzung der Plasmaabsorptionskante sehr schwer. Dabei ist überhaupt zu beachten, daß Rückschlüsse aus Messungen des Produkts $nk\nu$ ¹³⁾ auf Absorptionsstellen sehr schwer sind, worauf bei der Besprechung der Band-Band-Absorption bereits von Fröhlich,

⁹⁾ E. David, Z. Physik **114**, 389 (1939).

¹⁰⁾ H. Jensen, Z. Physik **106**, 620 (1937).

¹¹⁾ F. Bloch, Z. Physik **81**, 363 (1933).

¹²⁾ In diesem Zusammenhang mag es interessant sein, darauf hinzuweisen, daß durch den gleichen Gedankengang Langmuir seinerzeit auf die Entdeckungen der Plasmaschwingungen bei Gasentladungen geführt wurde. Die normalen Bremswege von in eine Gasentladung geschossenen Elektronen waren stets beträchtlich kleiner, als auf Grund der damaligen theoretischen Ergebnisse zu erwarten war. Daraus schloß Langmuir, daß ein bisher noch nicht bekannter Prozeß der Energieübernahme vorhanden sein muß, als den er die Schwingungen der Plasmamasse des Gases erkannte. Langmuir konnte dann sehr bald experimentell nachweisen, daß diese Schwingungen auch Strahlung auszusenden imstande sind, wobei es ihm gelang, die Richtigkeit der nach ihm benannten Formel für die Frequenz dieser Schwingungen zu verifizieren.

¹³⁾ n und k sind Real- und Imaginärteil des komplexen Brechungsexponenten.

Sommerfeld und Bethe hingewiesen wurde. Das dort Gesagte gilt genau entsprechend für die Beurteilung der Lage der Plasmaabsorption. Das vorliegende experimentelle Material könnte etwa ausgedeutet werden durch die Annahme, daß die langwellige Absorptionskante der Plasmaschwingungen je nach Art des Metalles zwischen 4000 Å und 5000 Å liegt.

Wenn man nun diesen Wert der Absorptionskante mit denjenigen Werten vergleicht, die sich aus der Langmuirschen Formel (I, 5) ergeben, so findet man für alle Metalle deutlich zu kleine Werte, für Ag und Au, die beide fast die gleiche Elektronendichte haben, Werte zwischen 1300 und 1400 Å. Es liegen danach nach unserer Ansicht die wirklich auftretenden Plasmaabsorptionskanten um den Faktor 3,5 nach längeren Wellen verschoben, um den gleichen Faktor also, um den sich die Eindringtiefen magnetischer Felder nach den neuesten Messungen von dem von London berechneten Wert unterscheiden.

Es hat damit also den Anschein, als ob die von uns aus theoretischen Gründen postulierten Terme der Plasmaschwingungen, die zwangsläufig zu einer Theorie der Supraleitung führten, nicht nur vorhanden sind, sondern sich auch optisch im sichtbaren Gebiet der Metallabsorption bemerkbar machen. Damit würde also das Spektrum der Metalle um einen charakteristischen Anteil vermehrt werden, der bisher nicht beachtet worden ist. Dieses Ergebnis erinnert an einen Deutungsversuch der Supraleitung durch F. London, der darauf aufmerksam gemacht hat, daß die Supraleitung verstanden werden kann, wenn man die Existenz gewisser neuer Elektronenterme annimmt, über deren Eigenschaften er genaue Angaben machen konnte. Es ist nicht von der Hand zu weisen, daß die von uns gefundenen neuen Terme die von London postulierten Eigenschaften haben. Wenn das der Fall wäre, so würde ein tieferer Zusammenhang zwischen dem Londonschen und unserem Deutungsversuch zur Supraleitung vorhanden sein.

2. Eindringtiefe magnetischer Felder und Absorptionskante

Die Existenz der Plasmawechselwirkung hat, wie wir in (II) zeigen konnten, eine Relation zwischen Strom und Vektorpotential zur Folge, die der bekannten Londonschen Relation sehr ähnlich ist:

$$\vec{j} = - \frac{n_0 e^2}{m c} \cdot \mathfrak{A}. \quad (\text{II}, 5)$$

Der Unterschied gegenüber der Londonschen Relation besteht nur darin, daß die Elektronendichte n_0 nicht mehr räumlich konstant ist, sondern der Gleichung

$$e \cdot \varphi = \frac{\partial E_0}{\partial n_0} \quad (\text{II}, 7)$$

genügt. Hier ist φ das elektrostatische Potential des Kristalls und E_0 die Nullpunktsenergie als Funktion der Dichte n_0 , wobei man im einfachsten Falle für E_0 den Sommerfeldschen Wert für die Nullpunktsenergie eines Elektronengases wählen kann. Die Gleichung (II, 5) unterscheidet sich von (I, 3) nur dadurch, daß in (I, 3) n eine räumliche Konstante ist.

Ebenso, wie man in (I) mit Hilfe von (I, 3) zur Gleichung (I, 4) übergeht, die dort gleichzeitig nicht nur für den Strom \vec{j} , sondern auch das Vektorpotential \mathfrak{A}

gilt, kann man mit Hilfe von (II, 5) zu einer Differentialgleichung übergehen, die jetzt wegen der räumlichen Inkonzanz von n_0 nur noch für \mathfrak{A} gilt:

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\mathfrak{A}} + 4\pi^2 \frac{n_0 e^2}{\pi m c^2} \cdot \mathfrak{A} - \Delta \mathfrak{A} = 0. \quad (1)$$

Fragt man nach zeitlich periodischen Lösungen, so gelangt man zu der Eigenwertgleichung

$$\Delta f + 4\pi^2 \left(\frac{\nu^2}{c^2} - \frac{n_0(xyz)e^2}{\pi m c^2} \right) f = 0. \quad (2)$$

Der kleinste dieser Eigenwerte ist dann, abgesehen vom Faktor $4\pi^2$, die Reziproke des Wellenlängenquadrates der gerade noch von Kristall absorbierten Strahlung. Ist n_0 konstant und der mittleren räumlichen Dichte der Elektronen im Mittel gleich, so erhalten wir für die Grenzfrequenz genau die Langmuirsche Formel, die also für Ag einen Wert von 1350 Å für die Grenzwellenlänge ergibt.

Experimentell erhält man aber einen um etwa 3,5mal größeren Wert für die Grenzwellenlänge. Daß man mit der Langmuirschen Formel den kleinsten Eigenwert von Gleichung (3) nur größenordnungsmäßig wiedergeben kann, darf uns aber nicht verwundern. Wir können umgekehrt, solange wir über den Verlauf von n_0 gar nichts wissen, die experimentellen Ergebnisse als eine Vervollständigung der Gleichung (2) ansehen. Die Langmuirsche Formel stimmt deswegen mit der Erfahrung nur ungenau überein, weil die Voraussetzung, die zu ihrer Ableitung gemacht wurde, nicht mehr zutrifft: die Elektronen im Metall sind nicht mehr als frei zu betrachten. Die Abweichung zwischen der Langmuirschen Formel und der wirklich vorliegenden Grenzfrequenz kann also ein Maß für die Gebundenheit der Elektronen im Metall angesehen werden.

Übrigens haben wir bisher stillschweigend angenommen, daß die Dielektrizitätskonstante ϵ infolge des Vorhandenseins der stärker gebundenen Elektronen, die nicht zum Plasma gehören, gleich 1 gesetzt werden darf. Das ist, wie bereits Jensen¹⁴⁾ bemerkt hat, nicht unbedingt richtig. Man würde wohl eine Dielektrizitätskonstante zu erwarten haben, die größer als 1 ist. Ihr Vorhandensein würde eine Verkleinerung der kleinsten Eigenfrequenz ν_0 um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ hervorrufen, wie man sich unschwer überlegen kann.

Wenn wir nun die Eindringtiefe magnetischer Felder in einen Supraleiter berechnen wollen, so haben wir Gleichung (1) mit zeitlich konstantem \mathfrak{A} zugrunde zu legen. Wir können also die Eindringtiefe aus folgender Gleichung berechnen:

$$\Delta \mathfrak{A} - 4\pi^2 \frac{n_0(xyz)e^2}{\pi m c^2} \mathfrak{A} = 0.$$

Nehmen wir an, daß die Oberfläche des Supraleiters eine Ebene ist und daß die x -Achse senkrecht zu dieser Ebene steht ($x = 0$ sei diese Ebene, $x > 0$ das Gebiet des Supraleiters), so können wir diese Gleichung mit dem Ansatz

$$\mathfrak{A} = e^{-\beta x} \cdot \Phi(xyz),$$

wo β^{-1} also die Eindringtiefe bedeutet, in die folgende überführen:

$$\Delta \Phi - 2\beta \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \left(\beta^2 - \frac{4\pi^2 n_0(xyz)e^2}{\pi m c^2} \right) \Phi = 0. \quad (3)$$

¹⁴⁾ H. Jensen, l. c.

Wenn wir nun noch annehmen, daß Φ eine schwach variierende Funktion ist, so daß das Glied $\beta \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ klein ist gegen $\beta^2 \Phi$, was wegen der Kleinheit der Eindringtiefe β^{-1} fast immer erfüllt sein dürfte, so geht Gleichung (3) offenbar in Gleichung (2) über und wir finden für die Eindringtiefe

$$\beta^{-1} = \frac{c}{2\pi v_0} \quad (4)$$

Durch diese Gleichung wird ein ganz neuer Zusammenhang festgestellt zwischen zwei Größen, die bisher in keiner Beziehung zueinander standen:

Eindringtiefe magnetischer Felder bei Supraleitung und Grenzwellenlänge der kurzwelligeren Absorption im Sichtbaren des betreffenden Metalles sind zueinander proportional. Der Proportionalitätsfaktor ist $\frac{1}{2\pi}$.

Wenn man nun versuchen will, aus der Gleichung (II, 5) eine „Londonsche Relation“ zu machen, so kann dies nur durch Mittelwertbildung geschehen. Man würde dann eine Gleichung zwischen dem makroskopisch meßbaren Suprastrom \mathfrak{J} und dem Vektorpotential \mathfrak{A} erwarten von der Form

$$\mathfrak{J} = -\frac{1}{\lambda c} \cdot \mathfrak{A}, \quad (5)$$

wo λ die Londonsche Konstante, also eine räumlich konstante Größe, ist. Sie steht nach der phänomenologischen Theorie von London und v. Laue mit der reziproken Eindringtiefe β in folgender Beziehung:

$$\lambda = 4\pi \cdot \frac{1}{\beta^2 \cdot c^2}.$$

In unserer Theorie kommt der Londonschen Konstanten keine unmittelbare Bedeutung zu. Auf dem Umweg über die Eindringtiefe aber können wir doch die Londonsche Konstante mit der Grenzfrequenz der Ultraviolettabsorption eines Metalles in Verbindung bringen: $\lambda^{-1} = \pi v_0^2$.

Die Experimente von Shoenberg und Pippard schließen eindeutig das Zutreffen einer Eindringtiefe der Größe $\frac{cm^{\frac{1}{2}}}{2e\pi^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}}$, wie sie sich aus dem ursprünglichen Londonschen Wert m/ne^2 für λ ergeben würde, als zu klein aus. Die gemessenen Werte sind um den Faktor 3 bis 4 größer als die Werte der Londonschen Theorie. Die gemessenen Werte sind um genau denselben Faktor größer wie die wirklichen Grenzwellenlängen der Plasmaabsorption der Metalle, verglichen mit den Werten, die man erhält, wenn man die Langmuirsche Formel für „freie“ Elektronen zugrunde legt. Die Ergebnisse stimmen gut mit unserer Behauptung von dem Zusammenhang von Ultraviolettabsorption und Supraleitung überein.

3. Die Übergangswahrscheinlichkeiten der Plasmaabsorption

Im Hinblick auf dieses Ergebnis scheint es doch schon angebracht zu sein, einmal auszurechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit der Absorption von Lichtquanten durch ein Elektronenplasma ist. Um dies zu tun, brauchen wir einen

Ausdruck für die Energie der Wechselwirkung zwischen Plasma und elektromagnetischem Feld. Stellen wir das elektromagnetische Feld durch sein Vektorpotential \mathfrak{A}_F dar, das so gewählt werden soll, daß seine Divergenz verschwindet, so können wir also ansetzen, wenn wir die x -Achse in die Richtung der Fortpflanzung der ebenen Welle, die y -Achse bzw. z -Achse je nach der Polarisierung mit der Richtung von \mathfrak{A}_F zusammenfallen lassen,

$$\left. \begin{matrix} \mathfrak{A}_{Fy} \\ \mathfrak{A}_{Fz} \end{matrix} \right\} = d_k e^{2\pi i \cdot kx - 2\pi i \tilde{v}t} + d_k^* e^{-2\pi i \cdot kx + 2\pi i \tilde{v}t} \quad (6)$$

Als Energiedichte machen wir mit Hilfe des durch die Gleichung (II, 5) definierten Stromes j den Ansatz:

$$V_w = \frac{1}{c} j \cdot \mathfrak{A}_F = -\frac{e}{mc} \mathfrak{p} \cdot n_0 \cdot \mathfrak{A}_F \quad \mathfrak{p} = m \cdot \mathfrak{v}. \quad (7)$$

Indem wir weiter beachten, daß die Eigenschwingungen des „inneren“ Vektorpotentials \mathfrak{A} der Gleichung (2) genügen, können wir für j folgenden Fourier-Ansatz machen:

$$j = -\frac{e}{m} \sum_{\nu} \mathfrak{p}_{\nu} \cdot n_0 \cdot f_{\nu}(x y z).$$

Hier sind die \mathfrak{p}_{ν} komplexe Impulsvektoren harmonischer Oszillatoren, die zwar nicht mehr Funktionen der Raumkoordinaten x, y, z , wohl aber der Zeit t sind; und zwar ist ihre zeitliche Abhängigkeit durch $e^{\pm 2\pi i \nu t}$ gegeben. Nunmehr erhalten wir für V_w :

$$V_w = -\frac{e}{mc} \sum_{\nu} \left(d_k e^{-2\pi i \tilde{v}t} \left\{ \begin{matrix} p_{\nu y} \\ p_{\nu z} \end{matrix} \right\} f_{\nu} n_0 e^{2\pi i kx} + d_k^* e^{2\pi i \tilde{v}t} \left\{ \begin{matrix} p_{\nu y} \\ p_{\nu z} \end{matrix} \right\} f_{\nu} n_0 e^{-2\pi i kx} \right).$$

Mit diesem ergibt sich der Ausdruck für die Wechselwirkungsenergie, indem wir über den ganzen Raum integrieren

$$E_w = -\frac{e}{mc} \sum_{\nu} \left(d_k e^{-2\pi i \tilde{v}t} \left\{ \begin{matrix} p_{\nu y} \\ p_{\nu z} \end{matrix} \right\} \int f_{\nu} n_0 e^{2\pi i kx} d\tau + d_k^* e^{2\pi i \tilde{v}t} \left\{ \begin{matrix} p_{\nu y} \\ p_{\nu z} \end{matrix} \right\} \int f_{\nu} n_0 e^{-2\pi i kx} d\tau \right). \quad (8)$$

Bevor wir die Integrale, die hier auftreten, vereinfachen können, müssen wir noch über die Funktionen f_{ν} genauere Kenntnisse haben. Dazu ist es nur notwendig, darauf hinzuweisen, daß die Differentialgleichung (2) in der Funktion $n_0(xyz)$ eine im Gitter des Metalles räumlich periodische Funktion enthält. Formal stimmt daher die Differentialgleichung (2) mit der Schrödingerschen Differentialgleichung der Eigenfunktionen eines Kristalles mit periodischem Potential überein, nur mit dem Unterschied, daß der Eigenwert hier nicht mehr die Frequenz der Welle, sondern das Quadrat der Frequenz der Welle ergibt. Insbesondere dürfen wir schließen, daß die Funktionen f_{ν} die folgende Form haben:

$$f_{\nu} = e^{2\pi i \mathfrak{R} \tau} F_{\nu}(x y z), \quad (9)$$

wo F_{ν} eine im Gitter des Kristalles periodische Funktion bedeutet. Unter \mathfrak{R} verstehen wir den „reduzierten“ Ausbreitungsvektor, der immer so gewählt werden kann, daß seine Projektionen auf die Kristallachsen a_1, a_2, a_3 zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ liegen.

$$|\mathfrak{R} \cdot a_i| \leq \frac{1}{2}.$$

Über die Verteilung der möglichen Eigenwerte der Gleichung (2) darf man die gleichen Schlüsse ziehen, wie im Falle der Eigenwerte und Eigenfunktionen in einem periodischen Potential. Die Eigenwerte liegen also auch hier kontinuierlich und es wechseln erlaubte und verbotene Gebiete ab. Also auch hier zeigt sich eine Bandstruktur für die möglichen Werte von ν der Gleichung (2).

Man kann jedoch leicht überlegen, daß im Gegensatz zu den Ergebnissen für die Eigenwerte und Eigenfunktionen im periodischen Potentialfeld hier bei unseren Plasmafunktionen nur ein einziges, und zwar das unterste Band¹⁵⁾ eine physikalische Realität haben kann. Dies sieht man so ein: Die eine Kante des untersten Bandes wird ein Eigenwert derjenigen Eigenfunktion sein, für die in Gleichung (9) f gleich Null gesetzt werden muß. Diese Funktion ist also im ganzen Gitter periodisch. Wir können sie dadurch charakterisieren, daß wir nach einer Lösung der Gleichung (2) fragen, die so beschaffen ist, daß sie innerhalb einer geeignet gewählten Elementarzelle niemals verschwindet und außerdem auf der Oberfläche der Elementarzelle der Randbedingung $\frac{\partial f}{\partial n}$ genügt. Wenn wir uns diese Funktion in jeder Elementarzelle reproduziert denken, erhalten wir im ganzen Gitter eine periodische Funktion, die dank der Randbedingung sich stetig differenzierbar von einer Elementarzelle zur anderen fortsetzt.

Die andere Kante des Bandes gehört im allgemeinen zu einer Funktion, bei der die in (9) auftretende e -Funktion in zwei unmittelbar benachbarten Elementarzellen sich nur noch durch das Vorzeichen unterscheidet. Eine solche Funktion erhält man offenbar, indem man eine Lösung von (2) verlangt, die innerhalb einer Elementarzelle nicht verschwindet, aber auf der Oberfläche der Elementarzelle der Randbedingung $f = 0$ genügt. Sorgen wir dann dafür, daß in zwei aneinander anstoßenden Elementarzellen diese Funktionen mit verschiedenen Vorzeichen aneinander gesetzt werden, so haben wir damit eine Funktion im gesamten Kristall, die die Form (9) besitzt. Offenbar ist dies eine Funktion, deren Wellenlänge von der Größe des Abstandes zweier benachbarter Elektronen wird. Also ist dies die kleinste Wellenlänge der Plasmaschwingungen, bei der unsere kontinuierliche Beschreibung des Plasmas trotz der atomistischen Struktur der Elektronen allenfalls noch einen Sinn haben könnte. Die Eigenfunktionen, die zu höheren Bändern gehören, haben Wellenlängen, die kleiner sind als dem mittleren Abstand zweier Elektronen entspricht, und sind daher nicht mehr zu berücksichtigen. Daher ist nur das unterste Band der Plasmaeigenfrequenzen in der Natur verwirklicht.

Wenn wir (9) in die Integrale von Gl. (8) einsetzen, so erhalten wir, wenn wir bedenken, daß die Werte von τ an zwei entsprechenden Stellen verschiedener Kristallzellen sich um den Vektor

$$n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3$$

mit ganzzahligen n_1, n_2, n_3 unterscheiden:

$$\int n_0 f_{\nu} e^{\pm 2\pi i(\tau)} d\tau = \int n_0 F_{\nu} e^{2\pi i(\mathbf{R} \pm \mathbf{r})} d\tau \cdot \sum_n e^{2\pi i(\mathbf{R} \pm \mathbf{r})} \sum_{\mathbf{q}} n_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}},$$

wobei die Integration nunmehr nur noch über eine einzige Elementarzelle zu erstrecken ist. Die \sum_n hingegen ist über alle Elementarzellen auszudehnen.

¹⁵⁾ Dieses Band kann allerdings u. U. in mehrere voneinander getrennte Teilbänder zerfallen!

Nun ist aber die Summe über die n_k eine zwar endliche Summe, die über sämtliche Elementarzellen des Kristallgitters zu erstrecken ist, bei der die Zahl der Summanden jedoch sehr groß ist. Unter ihnen werden im allgemeinen immer je zwei Glieder sein, die praktisch den gleichen Wert, aber das entgegengesetzte Vorzeichen haben. Die Summe wird daher bei sehr großer Summenzahl praktisch gleich Null zu setzen sein, mit alleiniger Ausnahme des Falles, daß alle Glieder gleich $+1$ sind. Dies tritt dann und nur dann ein, wenn

$$\mathfrak{R} \pm \mathfrak{f} = g_m, \quad (10)$$

wo g_m ein „ganzzahliger“ Vektor des reziproken Gitters bedeutet:

$$g_m = m_1 b_1 + m_2 b_2 + m_3 b_3$$

mit

$$b_1 = \frac{a_2 \times a_3}{a_1 (a_2 \times a_3)}$$

und so fort, wobei wir für b_2 und b_3 entsprechende Gleichungen durch zyklische Vertauschungen der Indizes 1, 2, 3 erhalten. Bezeichnen wir mit γ_m das über eine Kristallelementarzelle erstreckte Integral

$$\gamma_m = \int_{(\text{Zelle})} F_\nu n_0 e^{2\pi i g_m \tau} d\tau, \quad (11)$$

so geht die Wechselwirkungsenergie E_w aus Gleichung (8) über in

$$E_w = -\frac{e}{mc} \begin{cases} d_k e^{-2\pi i \mathfrak{f} t} \{p_{\nu z}\} \cdot N \cdot \gamma_m & \text{für } \mathfrak{R} + \mathfrak{f} = g_m \\ d_k^* e^{+2\pi i \mathfrak{f} t} \{p_{\nu z}\} \cdot N \cdot \gamma_m & \text{für } \mathfrak{R} - \mathfrak{f} = g_m \end{cases} \quad (12)$$

Hier bedeutet N die Anzahl der im Kristall vorhandenen Zellen.

Wir wollen nun diskutieren, inwieweit die Gleichung (10) eine einschränkende Bedingung für den Prozeß der Absorption elektromagnetischer Strahlung durch ein Elektronengas ist. Hierzu müssen wir die Größenordnung von \mathfrak{R} , dem Ausbreitungsvektor der Plasmaschwingungen, kennen. \mathfrak{R} kann nach der Definition als „reduzierter“ Ausbreitungsvektor zwar nie größer als etwa 10^8 werden, jedoch könnte er natürlich weit unter dieser Schranke bleiben. Der Ausbreitungsvektor als Funktion der Frequenz ν läßt sich allerdings nur für den Fall eines „freien“ Plasmas berechnen, d. h. eines solchen, das wir in Arbeit I zugrunde gelegt haben. Obgleich wir der Ansicht sind, daß die dort gemachten Voraussetzungen zu grob sind, wollen wir doch annehmen, daß die Dispersion der Plasmawellen angenähert wenigstens durch die Dispersion eines freien „Plasmas“ wie in I beschrieben werden kann.

Aus der Gl. (I, 4) entnimmt man, wenn man für j den Ansatz

$$j = j_0 \cdot e^{2\pi i (\nu t - \mathfrak{R} \tau)}$$

macht, das Dispersionsgesetz der Plasmawellen

$$|\mathfrak{R}| = \frac{1}{c} \sqrt{\nu^2 - \nu_0^2}, \quad (13)$$

so daß mit dieser Gleichung (10) übergeht in

$$\frac{\tilde{v} \pm \sqrt{v^2 - v_0^2}}{c} = g_m. \quad (14)$$

Es ist also stets $|\mathfrak{R}| < |\mathfrak{f}|$ bezogen auf gleiche Frequenz.

Der Vektor g_m wird von drei Vektoren b_e aufgespannt, von denen jeder einen absoluten Betrag der Größe 10^8 hat. Ist also in g_m auch nur eine der drei Zahlen des Tripels m_1, m_2, m_3 von Null verschieden, so ist jedenfalls $|g_m| \gg |\mathfrak{f}|$ und damit auch gegen $|\mathfrak{R}|$, da $|\mathfrak{f}|$ bei Strahlung im Sichtbaren und Ultravioletten höchstens von der Größenordnung 10^5 ist. Daher kann Gl. (10) bzw. Gl. (14) nur für $g_m = 0$ erfüllt werden.

Wir werden ferner zu berücksichtigen haben, daß neben (14) auch noch der Energiesatz

$$h \tilde{v} = E_n - E_m$$

zu gelten hat, wo die E_k Energieniveaus harmonischer Oszillatoren sind. Da die Differenz der Energieniveaus $E_n - E_m$ beim harmonischen Oszillator, zwischen denen Übergänge möglich sind, gerade gleich $h \nu$ ist, so ergibt der Energiesatz $\tilde{v} = \nu$. Wenn man dies in Gl. (14) einsetzt, so erkennt man, daß sie jedenfalls für Strahlung im sichtbaren und ultravioletten Gebiet nicht zu erfüllen ist.

Andererseits dürfen wir nicht vergessen, daß Gl. (10) nur annäherungsweise erfüllt zu sein braucht. Es liegt dies daran, daß die endliche Summe

$$S = \sum_n e^{2\pi i(\mathfrak{R} \pm \mathfrak{f}) \cdot \sum_e n_e a_e}, \quad (15)$$

die wir in Gl. (12) mit dem Buchstaben N zusammengefaßt haben, auch dann noch fast den Wert N ergibt, wenn $\mathfrak{R} \pm \mathfrak{f}$ nicht gleich Null oder g_m , sondern gleich $g_m + \delta$ ist, wo δ nur hinreichend klein zu sein braucht. Es ist nur nötig, dafür zu sorgen, daß das Produkt aus δ mit dem Vektor $\sum_e n_e a_e$ mit dem größtmöglichen Wert von n_e immer noch klein gegen 1 ist.

Die Größenordnung der Länge der Vektoren a_e ist 10^{-8} . Der Wert von $|\mathfrak{f}|$ ist für eine Strahlung der Wellenlänge 5000 \AA gerade gleich $2 \cdot 10^4$. Nehmen wir an, daß wir uns in der Nähe der Absorptionskante der Plasmaschwingungen befinden, so ist $|\mathfrak{R}|$ noch sehr klein und $|\mathfrak{R} - \mathfrak{f}|$ von der Größenordnung von $|\mathfrak{f}|$, d. h. gleich $2 \cdot 10^4$. Nehmen wir weiter an, daß das Metall aus einer Schicht von T Atomlagen bestehe, und daß eine Strahlung senkrecht zu dieser Schicht, also in Richtung der x -Achse, diese Schicht durchdringe. Der Einfachheit halber wollen wir dann ferner annehmen, daß der kristalline Aufbau der metallischen Schicht kubisch ist und daß einer der Vektoren a_e , z. B. a_1 , die untereinander vom gleichen Betrage sind und aufeinander senkrecht stehen, in die Richtung der x -Achse falle. Unter den gemachten Voraussetzungen ist also nur $(\mathfrak{R} - \mathfrak{f}) a_1$ von Null verschieden, während beide Produkte $(\mathfrak{R} - \mathfrak{f}) a_2$ und $(\mathfrak{R} - \mathfrak{f}) a_3$ verschwinden. Daher geht die Summe Gleichung 16 in ein Produkt von 3 Summen über, von denen zwei Summen nur aus Summanden der Größe 1 bestehen. Das Produkt dieser beiden Summen ergibt also offenbar gerade die Zahl der Atome, die sich in einer monoatomaren Schicht des durchstrahlten Metalles befinden. Nennen wir die Zahl der Atome längs der y -Achse U , längs der z -Achse V , so ist das Produkt der genannten Summen gerade gleich $U \cdot V$.

Die dritte Summe nimmt die Form

$$\sum_{n_1} (e^{2\pi i (\mathfrak{R} - \mathfrak{f}) a_1})^{n_1}$$

an. Wenn wir die Zahl der atomaren Schichten in der Richtung der x -Achse mit T bezeichnen, so ist der Wert der Summe, abgesehen von einem komplexen Faktor vom Betrage 1, gegeben durch $\frac{\sin [T\pi (\mathfrak{R} - \mathfrak{f}) a_1]}{\sin [\pi (\mathfrak{R} - \mathfrak{f}) a_1]}$ und das Produkt der drei Summen geht über in

$$S = N \cdot \frac{\sin [T\pi (\mathfrak{R} - \mathfrak{f}) a_1]}{T \cdot \sin [\pi (\mathfrak{R} - \mathfrak{f}) a_1]}, \quad (16)$$

wobei wir $T \cdot U \cdot V$, die Gesamtzahl der Teilchen der Schicht, wieder mit N bezeichnet haben.

Die in der Gleichung (16) auftretende Funktion ist in der Optik wohl bekannt. Sie hat bei hinreichend großem T im allgemeinen sehr kleine Werte und nimmt nur den Wert 1 an, wenn die Gleichung

$$(\mathfrak{R} - \mathfrak{f}) a_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$$

erfüllt ist. In dieser Größe S äußert sich also der Einfluß der Schichtdicke. Die Größe S ist für die hier interessierenden Größenordnungen von \mathfrak{R} und \mathfrak{f} gleich N , solange die Schichtdicke etwa 20 Atomlagen nicht übersteigt. Bei etwa 1000 Atomlagen ist S nur noch ein knappes Zehntel von N .

Ist also die Schichtdicke größer als 1000 Atomlagen, so besteht wenig Aussicht, die Existenz der Plasmaschwingungen durch optische Prozesse nachzuweisen. Anders ist es allerdings, wenn wir metallische Schichten kleiner Schichtdicke oder Metallkolloide nicht zu großer Teilchen benutzen. Dann kann man erwarten, Absorptionsprozesse nachzuweisen, die intensitätsmäßig der Ultraviolettabsorption der Metalle in nichts nachstehen.

Hier muß noch nachgetragten werden, inwieweit der Ansatz (9) für die Eigenschwingungen des Plasmas in Einklang steht mit der Annahme endlicher Kristalle, über die die Summe S in (15) ausgeführt werden soll. Die in Gleichung (9) eingeführten Funktionen entsprechen offenbar quasiebenen durch den Kristall durchlaufenden Wellen, die in einem endlichen Kristall gar nicht existieren können. Um diesen Widerspruch zu überwinden, denken wir uns eine unendliche Zahl endlicher Kristalle der in Wirklichkeit vorliegenden Form zu einem unendlichen Kristall vereinigt. Dann fordern wir, daß die in (9) eingeführten Funktionen sich in allen diesen Kristallen periodisch immer wieder reproduzieren. Dies bedeutet also, daß wir nicht nur für die Funktionen F in (9) Periodizität für die einzelnen Elementarzellen zu verlangen haben, sondern daß dazu noch eine Forderung der Periodizität der Funktion $e^{2\pi i (\mathfrak{R} \cdot \mathbf{r})}$ in den einzelnen Makrokristallen gestellt wird. Von diesen Makrokristallen werden wir also die Annahme machen, daß die Zahl der Elementarzellen in der Richtung der a_1 -Achse gleich T , in Richtung der a_2 -Achse gleich U und in Richtung der a_3 -Achse gleich V sein soll. Durch eine solche Periodizitätsforderung schränken wir offenbar die Wahl des Ausbreitungsvektors \mathfrak{R} noch weiter ein, indem wir für \mathfrak{R} folgende Bedingung finden:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{T} k_1 b_1 + \frac{1}{U} k_2 b_2 + \frac{1}{V} k_3 b_3 \quad (k_1, k_2, k_3 = 0, \pm 1, \pm 2 \dots)$$

und die Beschränkung, die wir für den reduzierten Ausbreitungsvektor eingeführt haben, hat, wie man sich leicht überzeugt, zur Folge, daß die Zahl der nunmehr diskret liegenden Energieniveaus mit der Gesamtzahl der Elektronen $N = T \cdot U \cdot V$ übereinstimmt. Da zwei linear unabhängige transversale Plasmaschwingungen immer zu je einer Frequenz existieren, haben wir also $2N$ transversale Plasmaschwingungen, die zu dem einen existierenden Frequenzband gehören. Entsprechend werden wir von den longitudinalen Plasmaschwingungen, die wir bislang nicht behandelten, noch einmal N Eigenschwingungen erhalten, so daß die Gesamtzahl der Eigenschwingungen, wie in (1) gefordert, wirklich gleich $3N$, d. h. gleich der Zahl der Freiheitsgrade von N Elektronen ist.

Die Eigenenergie des Plasmas wird durch eine Summe von Energien harmonischer Oszillatoren mit Frequenzen $\nu \geq \nu_0$ dargestellt:

$$E = \frac{1}{2m} \sum_{\nu} (p_{\nu x}^2 + p_{\nu y}^2 + p_{\nu z}^2) + 2\pi^2 \sum_{\nu} \nu^2 (x_{\nu}^2 + y_{\nu}^2 + z_{\nu}^2).$$

Zur Schrödinger-Gleichung für das durch die einfallende elektromagnetische Welle Gleichung (6) gestörte Plasmasystem gelangen wir, indem wir zu E die Wechselwirkungsenergie E_w Gl. (9) hinzu addieren und dann $p_{\nu x}$, $p_{\nu y}$, $p_{\nu z}$ durch bzw. $\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}}$; $\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y_{\nu}}$; $\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z_{\nu}}$ ersetzen. Man sieht sofort, daß das Matrixelement für die Übergangswahrscheinlichkeit des Überganges Plasma ohne Quant zu Plasma mit Quant der Frequenz ν gegeben ist durch

$$W_{0,1} = \begin{pmatrix} [x_{\nu}]_{01} \\ [y_{\nu}]_{01} \\ [z_{\nu}]_{01} \end{pmatrix} \cdot e \int_{(\text{Zelle})} n_0 F_{\nu} d\tau \cdot \sum_n e^{2\pi i (\mathbf{R} - \mathbf{l}) \cdot \sum_{\mathbf{q}} n_{\mathbf{q}} \mathbf{a}_{\mathbf{q}}} \quad (17)$$

Hier sind die $[x_{\nu}]_{01}$ $[y_{\nu}]_{01}$ $[z_{\nu}]_{01}$ Matrixelemente der Geschwindigkeitskomponenten der Indizes 0, 1 harmonischer Oszillatoren von der Frequenz ν . Ihre absoluten Beträge sind also untereinander gleich. Es gilt

$$|[x_{\nu}]_{01}| = \sqrt{\frac{\hbar \nu}{2m}} > 10^8.$$

Das als Faktor auftretende, über eine einzige Elementarzelle zu erstreckende Integral hat eine einfache Bedeutung. Da $e \cdot n_0(xyz)$ die elektrische Dichte ist, kann das Integral zwanglos gedeutet werden als derjenige Teil der elektrischen Ladung einer Elementarzelle, der an der Absorption eines Quantes der Frequenz ν beteiligt ist.

An dieser Stelle muß noch etwas über die Normierung von F_{ν} gesagt werden. Da die durch Gl. (9) mit F_{ν} zusammenhängenden f_{ν} zu einer Fourierentwicklung von j benutzt werden, müssen die f_{ν} normiert sein:

$$\int_{(\text{Kristall})} f_{\nu} f_{\nu}^* d\tau = 1.$$

Schreiben wir also an Stelle von Gl. (9) die folgende:

$$f_{\nu} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i (\mathbf{R} \cdot \mathbf{r})} \cdot \tilde{F}_{\nu},$$

wo wiederum N die Zahl der Elementarzellen im Kristall ist, so haben wir erreicht, daß \tilde{F}_v jetzt in der Elementarzelle normiert ist

$$\int_{(\text{Zelle})} \tilde{F}_v \tilde{F}_v^* d\tau = 1.$$

Daraus sehen wir, daß nicht $e \int_{(\text{Zelle})} n_0 F_v d\tau$ gleich der zur Frequenz ν gehörenden Ladung gesetzt werden darf, sondern daß erst

$$e_v = e \int_{(\text{Zelle})} n_0 \tilde{F}_v d\tau = e \sqrt{N} \int_{(\text{Zelle})} n_0 \cdot F_v d\tau$$

diese Bedeutung haben kann. Beachten wir noch, daß die in Gl. (17) auftretende Summe S (Gleichung 15) den Wert $\eta \cdot N$ hat, wo $\eta = \frac{S}{N}$ eine reine Zahl kleiner als 1 ist, so können wir W_{01} aus Gleichung (17) schreiben

$$W_{01} = \eta \cdot N^{\frac{1}{2}} \cdot e_v \cdot \sqrt{\frac{h\nu}{2m}}. \quad (18)$$

Das Quadrat dieser Größe gibt die Absorption an. Diese ist also proportional dem Quadrat der zeitlichen Änderung eines el. Dipolmomentes, gebildet mit einer „reduzierten“ Ladung e_v und proportional der Zahl der Elektronen des Kristalles. Die mangelnde Impulsübereinstimmung zwischen Lichtquant und Plasmaquant hat eine scheinbare Reduktion der Zahl der bei der Absorption beteiligten Elektronen zur Folge, die durch η^2 gegeben ist.

4. Vergleich mit dem Experiment

In der Formel (18) ist die einzige Größe, die nicht genau bekannt ist, die Größe e_v . Sie ist sicher kleiner als die elektrische Ladung e eines Elektrons, im allgemeinen aber wohl noch von der gleichen Größenordnung. Von der Größe η^2 wissen wir, daß sie unter Voraussetzung der Gültigkeit des für die Plasmaschwingungen angenommenen Dispersionsgesetzes (13) etwa 10^{-2} für kompaktes Material beträgt und auf den Wert 1 heraufgeht, wenn die Dicke der durchstrahlten Schicht kleiner als etwa 20 Atomlagen ist. Dann könnte man erwarten, daß die Absorption der Plasmaschwingungen auch von der gleichen Größenordnung wird wie die Band-Band-Absorption.

In der Abb. 1 haben wir eine Abbildung aus einer Arbeit von Wolter umgezeichnet. Sie stellt im wesentlichen die Größe $nk\nu$ für Silber als Funktion der Wellenlänge dar. Wolter selbst hatte nicht $nk\nu$, sondern $nk\nu d$ dargestellt, wo d die Dicke der Schicht bedeutet. Da er aber die Dicke der Schicht auf Grund einer Schätzung angeben konnte, war es möglich, in seinen Ergebnissen die Schichtdicke noch zu eliminieren. Dabei fiel zunächst auf, daß die Band-Band-Absorption, die etwa bei 3300 Å beginnt, von der Schichtdicke völlig unabhängig ist. Kleine Diskrepanzen, die sich bei der Ultraviolettabsorption noch ergaben, haben wir benutzt, um die Angaben über die Schichtdicken ein wenig zu korrigieren. So glaubten wir, die Schichtdicke der dünnsten Schicht von 17 Å, wie Wolter schätzt, auf 14 Å reduzieren zu können, um volle Übereinstimmung

im Ultraviolett zu erhalten. Aus dem gleichen Grunde würden wir die dickste Schicht nicht, wie bei Wolter, mit 180 \AA , sondern mit 155 \AA angeben.

Man sieht zunächst, daß das Maximum im kurzwelligen Sichtbaren, das nach unserer Auffassung auf die Plasmaschwingungen zurückgeführt werden muß, ungefähr bei 4500 \AA liegt und daß die Absorption dort von der gleichen Stärke ist, wie die Absorption im Ultravioletten. Sie ist etwa 20mal so stark, wie bei der Absorption des kompakten Materials. Vermutlich wird bei der Absorption des kompakten Materials noch ein beträchtlicher Anteil der langwelligen „klassischen“ Absorption zuzuschreiben sein, so daß ein Verhältnis der Absorptionsstärken wie 1:100 entsprechend unserer Abschätzung keineswegs zu den Tatsachen im Widerspruch steht. Man sieht ferner auch keine Abnahme der Absorptionsstärke beim Übergang zu Schichten von 50 oder $60 \text{ \AA}^{16)}$, was ebenfalls in Übereinstimmung mit unseren Abschätzungen liegt.

Erst bei 155 \AA dicken Schichten macht sich eine beträchtliche Abnahme der Absorptionsstärke bemerkbar, was wiederum mit unserer Theorie in Übereinstimmung ist. Außerdem macht sich aber hier noch eine Verlagerung des Maximums bemerkbar, die deutlich davon herrührt, daß im roten bzw. ultraroten Gebiet ein weiteres Absorptionsmaximum als Folge der vergrößerten Schichtdicke aufgetreten ist. Diese konnten ebenfalls von Wolter¹⁷⁾ an Ag, Au, Pt, K und Na auf Grund des vorliegenden experimentellen Materials nachgewiesen werden. Diese Maxima sind im allgemeinen flacher als die Maxima im kurzwelligen Sichtbaren, die nach unserer Auffassung den Plasmaschwingungen zugeschrieben werden müssen. Auch unterscheiden sie sich von diesen dadurch, daß sie sich weder bei kompaktem Material, noch bei dünnen Schichten bemerkbar machen, sondern offenbar an die Existenz mittlerer Schichten gebunden sind. Besonders bei Pt konnte Wolter diese Erscheinung sehr deutlich nachweisen. Wolter führt die Existenz dieser Absorptionsstellen auf Verringe-

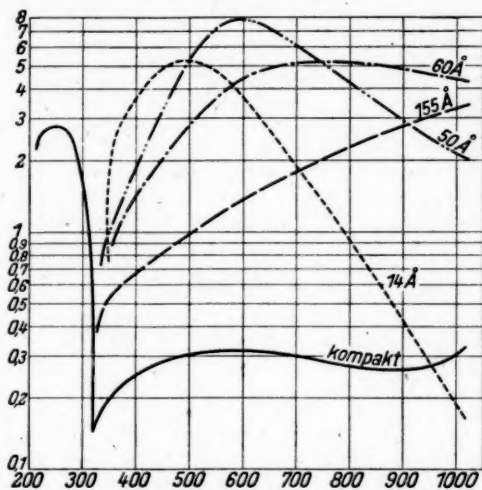


Abb. 1. Darstellung der Absorptionseigenschaften von Silber in Abhängigkeit von der Schichtdicke nach Wolter. Auf der Abszisse ist die Wellenlänge in $m\mu$, auf der Ordinate die für die Absorption charakteristische Größe $nk\nu$ mit dem Faktor 10^{-7} multipliziert aufgetragen

ebenfalls von Wolter¹⁷⁾ an Ag, Au, Pt, K und Na auf Grund des vorliegenden experimentellen Materials nachgewiesen werden. Diese Maxima sind im allgemeinen flacher als die Maxima im kurzwelligen Sichtbaren, die nach unserer Auffassung den Plasmaschwingungen zugeschrieben werden müssen. Auch unterscheiden sie sich von diesen dadurch, daß sie sich weder bei kompaktem Material, noch bei dünnen Schichten bemerkbar machen, sondern offenbar an die Existenz mittlerer Schichten gebunden sind. Besonders bei Pt konnte Wolter diese Erscheinung sehr deutlich nachweisen. Wolter führt die Existenz dieser Absorptionsstellen auf Verringe-

¹⁶⁾ Die geringfügige Vergrößerung der Absorption bei einer Schicht von 50 \AA Dicke ist vermutlich auf die Erhöhung des ultraroten Anteiles der Absorption zurückzuführen.

¹⁷⁾ H. Wolter, Z. Physik **113**, 547 (1939); **115**, 696 (1940).

rung der Dichte im Vergleich zum kompakten Material verbunden mit einer örtlichen Dichteschwankung zurück.

Besonders schön sieht man die von uns gemeinten Absorptionsmaxima an den in der Einleitung schon genannten Versuchsergebnissen von R. Havemann, die wir in Abb. 2 wiedergeben. Man erkennt hier deutlich bei Silber und Quecksilber das Maximum im kurzwelligen sichtbaren bzw. langwelligen ultravioletten Gebiet. Durch Intensitätsvergleich zwischen dem ultravioletten Maximum bei Silber, das von der Band-Band-Absorption herrührt und auch genau an der zu erwartenden Stelle liegt, und den Ergebnissen von Wolter an dünnen Schichten würde man die Teilchendurchmesser des Silbersols auf etwa 100 bis 150 Å schätzen, was man wohl auch als plausibel ansehen darf. Infolge des Fehlens der Band-Band-Absorption bei

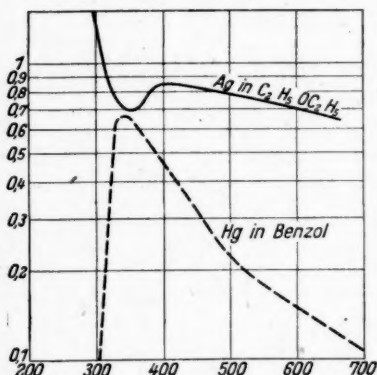


Abb. 2. Darstellung der Absorption von Silber- und Quecksilberkolloiden nach Messungen von R. Havemann. Abszisse und Ordinate haben die gleiche Bedeutung wie in Abb. 1

liegen die Plasmaabsorptionsstellen bei Cadmium und Zink noch etwas kurzwelliger als bei Quecksilber und zwar bei Zn noch kurzwelliger als bei Cd. Die Elektronendichten von Quecksilber, Cadmium und Zink wachsen in der Reihenfolge der Aufzählung der drei Metalle, wobei alle drei genannten Metalle im Gegensatz zu Ag als zweiwertig angesehen werden. Es könnte danach den Anschein haben, als ob die Langmuirsche Formel zwar absolut genommen nicht die richtigen Werte für die Grenzwellenlängen der Plasmaabsorption liefert, daß sie aber wenigstens qualitativ die Reihenfolge für das Einsetzen der Plasmaabsorption bei den verschiedenen Metallen richtig vorausszusagen gestattet.

Es mag nun noch kurz darauf hingewiesen werden, welche Rolle die longitudinalen Plasmaschwingungen bei der Absorption von Licht spielen können. Bisher hatten wir ja nur die Absorptionsintensität der transversalen Plasmaschwingungen berechnet. Man müßte also, um die Absorptionsintensität der longitudinalen Plasmaschwingungen auszurechnen, die Wechselwirkungsenergiedichte zwischen den Plasmaschwingungen longitudinalen Charakters und den einfallenden elektro-

Quecksilber kommt dort die Absorption im kurzwelligen Teil des Sichtbaren besonders gut zum Vorschein, obgleich die Absorption im Vergleich zum Silber hier etwas kleiner ist. Auch sieht man deutlich, daß das Maximum kurzwelliger liegt als das Maximum beim Silber. Beachtet man noch, daß auf der langwelligen Seite die Absorption von der langwelligen und „klassischen“ Absorption des Elektronengases herrühren muß, so ist die Annahme, daß die langwellige Grenze der Plasmaschwingungen für Hg bei etwa 4500 Å liegt, mit den Havemannschen Ergebnissen durchaus vereinbar. 4500 Å wäre aber gerade die Wellenlänge, die sich aus dem von Pippard gewonnenen Wert für die Eindringtiefe nach unserer Theorie für die Grenzwellenlänge der vom Elektronenplasma absorbierten Strahlung ergeben müßte. Wie Havemann weiter mitteilt,

magn
wirk
wobe
Felds
tät d
schw
vekt
sieht
Vekt
tung
druck
sonde
daher
Absor
von l
im D
Schw
gang
wie l
zu b

Berl
Wiss

magnetischen Wellen, die transversal sind, berechnen. Als Ausdruck der Wechselwirkung könnte man das Raumintegral über die Größe $e n_0 \mathbf{s} \cdot \mathbf{E}$ zugrunde legen, wobei $e n_0 \mathbf{s}$ das Dipolmoment der Plasmaschwingungen und \mathbf{E} die elektrische Feldstärke der einfallenden Wellen bedeutet. Aus der Forderung der Longitudinalität der Plasmaschwingungen folgt jetzt, daß der Ausbreitungsvektor \mathbf{k} der Plasmaschwingungen in der Richtung des Vektors $n_0 \mathbf{s}$ liegt, während \mathbf{f} , der Ausbreitungsvektor der elektromagnetischen Wellen, nach wie vor senkrecht zu \mathbf{E} ist. Man sieht daraus schon, daß die Änderung des Impulses, die im wesentlichen durch die Vektordifferenz $\mathbf{k} - \mathbf{f}$ gegeben ist, einen Vektor darstellt, der weder in die Richtung von \mathbf{s} noch in die Richtung von \mathbf{E} zeigt. Dies hat zur Folge, daß in den Ausdruck der Übergangswahrscheinlichkeit nicht nur die Funktion $\frac{\sin [T \pi (\mathbf{k} - \mathbf{f})_x a_1]}{\sin [\pi (\mathbf{k} - \mathbf{f})_x a_1]}$,

sondern auch z. B. die Funktion $\frac{\sin [U \pi (\mathbf{k} - \mathbf{f})_y a_2]}{\sin [\pi (\mathbf{k} - \mathbf{f})_y a_2]}$ als Faktor eingeht. Man könnte daher schon bei Schichten endlicher Ausdehnung nicht mehr eine nennenswerte Absorption durch longitudinale Schwingungen erwarten. Höchstens im Falle von kolloidalen Lösungen, bei denen die Teilchengrößen kleiner als 20 Atomlagen im Durchmesser betragen, könnte man eine Absorption durch longitudinale Schwingungen bemerken. Aber auch diese könnte das Bild des Absorptionsvorganges nicht wesentlich ändern, da die Grenzen der Absorption die gleichen sind wie bei den transversalen Schwingungen. Es genügt daher, die letzteren allein zu betrachten.

Berlin-Buch, Institut für Festkörperforschung der Deutschen Akademie der Wissenschaften und Berlin, Institut für theoretische Physik der Universität sowie Berlin, II. Physikalisches Institut der Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 22. Dezember 1948.)

Anwendung der Vierpoltheorie auf die Probleme der optischen Reflexionsminderung, Reflexionsverstärkung und der Interferenzfilter

Von Kurt Schuster

(Mit 2 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Die bei der Behandlung von Leitungsvorgängen der Hochfrequenztechnik und Akustik seit langem bewährte Vierpoltheorie kann auch auf die Lichtausbreitung durch eine Folge planparalleler Schichten Anwendung finden. Für senkrechten Lichteinfall werden die Grundgleichungen angegeben. Als Beispiel wird das Problem der Entspiegelung durch eine Doppelschicht dargestellt.

Durch Aufbringen geeigneter dünner Schichten läßt sich die störende Reflexion an Linsen weitgehend beseitigen¹⁾ und das Reflexionsvermögen von Metallspiegeln stark erhöhen²⁾. Durch Aneinanderreihen einer Anzahl dünner Schichten aus verschiedenen Stoffen können Spektralfilter von sehr geringer Durchlaßbreite konstruiert werden³⁾. Die erzielten Wirkungen beruhen auf der Lichtinterferenz an dünnen Schichten. Zur theoretischen Behandlung der genannten Probleme kann mit Vorteil das aus der Hochfrequenztechnik und Akustik bekannte Verfahren der Vierpoltheorie⁴⁾ herangezogen werden. Besonders einfach liegen die Verhältnisse bei senkrechtem Lichteinfall. Im folgenden soll daher dieses Verfahren in seiner Nutzenanwendung auf die Optik kurz beschrieben und seine Brauchbarkeit an einem speziellen Beispiel dargelegt werden.

Die Wirkung jeder Schicht ist durch die drei Größen Brechungsindex n , Absorptionskoeffizient κ und Dicke d gegeben. Die Kreisfrequenz werde mit ω , die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum mit c bezeichnet; λ und v sollen Wellenlänge und Lichtgeschwindigkeit des betreffenden Mediums bedeuten. Die reelle Wellenzahl ist dann gegeben durch

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega n}{c}.$$

¹⁾ Vgl. A. Smakula, *Glastechn. Ber.* **19**, 377 (1941).

²⁾ Vgl. R. Meßner, *Optik* **2**, 228 (1947).

³⁾ Vgl. W. Geffcken, *Angew. Ch.* **A 60**, 1 (1948).

⁴⁾ Für die Akustik sind die entsprechenden Gedankengänge z. B. in dem Artikel des Verfassers „Die Messung mechanischer und akustischer Widerstände“ (Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften **21**, 313 (1945) kurz dargestellt. Im übrigen sei auf die einschlägige Literatur der Schwachstromtechnik und der Hochfrequenztechnik verwiesen.

Die für die Lichtausbreitung maßgebenden Größen sind der komplexe Brechungsindex q und die komplexe Wellenzahl p . Für q und p gelten die Gleichungen:

$$q = n \cdot (1 - j\kappa)$$

$$p = k \cdot (1 - j\kappa) = \frac{\omega}{c} \cdot q.$$

Die Lichtstrahlrichtung, die senkrecht zu den Flächen der Schichtenfolge angenommen wird, bilde die x -Achse eines kartesischen Koordinatensystems. Die Lichtwelle sei in Richtung der z -Achse linear polarisiert, eine Annahme, die bei isotropen Stoffen und senkrechtem Einfall keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet. Dann wird in jeder Schicht der ebene elektromagnetische Wellenvorgang durch die beiden Feldkomponenten E_y und H_z beschrieben. In dem die Schichtenfolge abschließenden Medium, das als unendlich ausgedehnt angenommen wird, besteht der Lichtvorgang aus einer fortschreitenden Welle. In den einzelnen dünnen Schichten und in dem der Schichtenfolge vorgelagerten Medium setzt sich der Vorgang im allgemeinen aus je einer hinlaufenden und einer zurückkommenden Welle zusammen. Das Verhältnis E_y/H_z in einer rein fortschreitenden ebenen Welle ergibt sich aus der Maxwellschen Theorie bei Benutzung des cgs-Systems (E_y in elektrostatischen, H_z in elektromagnetischen Einheiten) zu

$\frac{1}{n \cdot (1 - j\kappa)}$, bei Benutzung des internationalen Systems (E_y in Volt/cm, H_z in Ampere/cm) zu $\frac{376,5}{n \cdot (1 - j\kappa)}$ Ohm. Die Größe E_y/H_z in einer rein fortschreitenden ebenen Welle soll als der „optische Wellenwiderstand“ Z des betreffenden Mediums bezeichnet werden. Der optische Wellenwiderstand ist in nicht absorbierenden Stoffen reell, in absorbierenden komplex. Wird das Verhältnis E_y/H_z innerhalb eines beliebigen ebenen Wellenvorgangs gebildet, der sich aus einem hinlaufenden und einem zurückkommenden Anteil zusammensetzt, so soll allgemein vom „optischen Widerstand“ \mathfrak{Z} gesprochen werden.

In einer bestimmten Schicht 1 mit dem komplexen Brechungsindex q_1 und der komplexen Wellenzahl p_1 sei nun der Wellenvorgang unter Benutzung des cgs-Systems in folgender Weise dargestellt:

$$E_y^{(1)} = \mathfrak{A}_1 \cdot e^{-jp_1 x_1} + \mathfrak{B}_1 \cdot e^{+jp_1 x_1}$$

$$H_z^{(1)} = q_1 \cdot (\mathfrak{A}_1 \cdot e^{-jp_1 x_1} - \mathfrak{B}_1 \cdot e^{+jp_1 x_1}). \quad (1)$$

Die Koordinate x_1 soll ihren Nullpunkt in der der Lichtquelle zugewandten Grenzfläche der Schicht haben. Werden die Werte der Feldkomponenten in dieser Grenzfläche kurz mit E_1 und H_1 , die Werte der Feldkomponenten in der der Lichtquelle abgewandten Grenzfläche der Schicht mit E_2 und H_2 bezeichnet, so wird

$$E_1 = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_1 \quad E_2 = \mathfrak{A}_1 \cdot e^{-jp_1 d_1} + \mathfrak{B}_1 \cdot e^{+jp_1 d_1}$$

$$H_1 = q_1 (\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{B}_1) \quad H_2 = q_1 (\mathfrak{A}_1 \cdot e^{-jp_1 d_1} - \mathfrak{B}_1 \cdot e^{+jp_1 d_1}). \quad (2)$$

Dabei bedeutet d_1 die Dicke der Schicht. Durch Eliminierung der komplexen Amplituden \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{B}_1 erhält man einen unmittelbaren Zusammenhang zwischen den Eingangs-Feldgrößen und den Ausgangs-Feldgrößen der Schicht in Form der sogenannten Vierpolgleichungen:

$$E_1 = \cos p_1 d_1 \cdot E_2 + \frac{j}{q_1} \sin p_1 d_1 \cdot H_2$$

$$H_1 = jq_1 \sin p_1 d_1 \cdot E_2 + \cos p_1 d_1 \cdot H_2. \quad (3)$$

Durch Division der beiden Gleichungen ergibt sich ein Zusammenhang zwischen den Werten β_1 und β_2 des optischen Widerstandes in der Eingangs- und Ausgangsgrenzfläche der Schicht:

$$\beta_1 = \frac{\beta_2 \cdot \cos p_1 d_1 + \frac{j}{q_1} \cdot \sin p_1 d_1}{j q_1 \beta_2 \sin p_1 d_1 + \cos p_1 d_1} \quad (4)$$

Es ist zu beachten, daß sich die Indices bei p_1 , q_1 , d_1 auf die Schicht selbst, bei den optischen Widerständen β_1 und β_2 auf die Grenzflächen der Schicht beziehen. Die Vereinfachung der rechnerischen Handhabung der Probleme, die die Vierpoltheorie mit sich bringt, beruht letzten Endes auf der neuen Formulierung der Bedingung der Stetigkeit beim Durchgang durch eine Grenzfläche. Die beiden Stetigkeitsbedingungen für die Feldkomponenten E_y und H_z , wie sie bei der üblichen Behandlung des Problems angesetzt werden, können durch die Vierpoltheorie zu der einen Stetigkeitsbedingung für den optischen Widerstand zusammengefaßt werden. Der optische Widerstand in einer Grenzfläche ist jeweils durch die dahinter angeordneten Teile der Schichtenfolge gegeben. Gl. (4) ermöglicht es, das System der Schichtenfolge bis zur Eingangsgrenzfläche der ersten Schicht rückwärts durchzurechnen; sie ist dementsprechend als die Gleichung der Widerstandstransformation zu bezeichnen. Für die optischen Aufgabestellungen ist man nicht unmittelbar am optischen Eingangswiderstand, sondern am Reflexionsvermögen interessiert. Das komplexe Amplituden-Reflexionsvermögen $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0/\mathfrak{N}_0$ an der ersten Grenzfläche ist in bekannter Weise gegeben durch

$$\mathfrak{R} = \frac{\beta_1 - Z_0}{\beta_1 + Z_0}, \quad (5)$$

wobei Z_0 den optischen Wellenwiderstand des der Schichtenfolge vorgelagerten Mediums und β_1 den optischen Widerstand in der ersten Grenzfläche bedeutet. Das Energie-Reflexionsvermögen R ergibt sich daraus in einfacher Weise zu

$$R = |\mathfrak{R}|^2 = \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{R}^*,$$

wobei \mathfrak{R}^* den zu \mathfrak{R} konjugiert komplexen Wert bezeichnet.

Die Anwendung der Gl. (4) und (5) auf die Probleme der Reflexionsverminderung, Reflexionserhöhung und der Interferenzfilter ermöglicht die Lösung der gestellten Aufgaben in besonders übersichtlicher Weise. Als Beispiel soll im folgenden die Entspiegelung durch eine Doppelschicht dargelegt werden. In der vorhandenen Literatur⁵⁾ wird die Dicke jeder Einzelschicht zu einer Viertelwellenlänge angenommen, und es werden die Wertepaare n_1 , n_2 berechnet, die zu einer vollkommenen Entspiegelung führen. Die folgende Berechnung nach der Vierpoltheorie wird darüber hinaus zeigen, daß in gewissen Bereichen ein beliebiges Wertepaar n_1 , n_2 zur Realisierung der vollkommenen Entspiegelung herangezogen werden kann, wobei dann die zu wählenden Schichtdicken im allgemeinen von der Viertelwellenlänge abweichen.

In Abb. 1 ist die zu untersuchende Anordnung schematisch dargestellt. Die beiden Schichten besitzen die Brechungsindices n_1 und n_2 und die Schichtdicken d_1 und d_2 . Der Brechungsindex des vorgelagerten Mediums hat den Wert n_0 , der des abschließenden Mediums den Wert n_3 . Alle Stoffe sind nicht absorbierend

⁵⁾ R. L. Mooney, J. Opt. Soc. Am. **35**, 574–583 (1945); Ref. Optik **2**, 164 (1947); L. Hiesinger, Optik **3**, 485 (1948).

($\alpha = 0, q = n, p = k$). Der Wellenwiderstand des vorgelagerten Mediums beträgt also $1/n_0$, der des abschließenden Mediums $1/n_3$. Entsprechend der Begriffsbildung der Vierpoltheorie besteht die Aufgabe darin, für eine bestimmte Frequenz die Wellenwiderstände der beiden Medien durch einen Transformator einander „anzupassen“, um dadurch die Reflexion zu beseitigen. Die optischen Widerstände an den drei Grenzflächen werden mit $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3$ bezeichnet. Die stufenweise erfolgende Berechnung der Widerstände ergibt

$$\begin{aligned}\mathfrak{Z}_3 &= \frac{1}{n_3} \\ \mathfrak{Z}_2 &= \frac{\mathfrak{Z}_3 \cdot \cos k_2 d_2 + \frac{j}{n_3} \cdot \sin k_2 d_2}{j n_2 \cdot \mathfrak{Z}_3 \cdot \sin k_2 d_2 + \cos k_2 d_2} \\ \mathfrak{Z}_1 &= \frac{\mathfrak{Z}_2 \cdot \cos k_1 d_1 + \frac{j}{n_1} \cdot \sin k_1 d_1}{j n_1 \cdot \mathfrak{Z}_2 \cdot \sin k_1 d_1 + \cos k_1 d_1}\end{aligned}\quad (6)$$



Abb. 1. Schema der Doppelschicht zur Entspiegelung

Im Falle der Reflexionsfreiheit $\mathfrak{R} = 0$ muß nach (5) $\mathfrak{Z}_1 = Z_0 = 1/n_0$ gemacht werden. Durch Einsetzen dieses Wertes in die letzte Gleichung nimmt die Bedingung der Reflexionsfreiheit die Form an:

$$\mathfrak{Z}_2 = \frac{\cos k_1 d_1 - j \frac{n_0}{n_1} \sin k_1 d_1}{n_0 \cos k_1 d_1 - j n_1 \sin k_1 d_1}.$$

Durch Gleichsetzen mit der zweiten Gleichung von (6) erhält man nach einigen einfachen Umformungen

$$\operatorname{tg} k_1 d_1 \cdot \operatorname{tg} k_2 d_2 = \frac{1 - \frac{n_0}{n_2}}{\frac{n_1}{n_2} - \frac{n_0}{n_1} \frac{n_2}{n_3}} \quad (7)$$

$$\frac{\operatorname{tg} k_1 d_1}{\operatorname{tg} k_2 d_2} = \frac{\frac{n_2}{n_3} - \frac{n_0}{n_3}}{\frac{n_0}{n_1} - \frac{n_2}{n_3}}.$$

Hieraus ergeben sich sofort die Gleichungen zur Bestimmung der beiden Schichtdicken:

$$\operatorname{tg} k_1 d_1 = \pm \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{n_0}{n_2}\right) \cdot \left(\frac{n_2}{n_3} - \frac{n_0}{n_3}\right)}{\left(\frac{n_1}{n_2} - \frac{n_0}{n_1} \frac{n_2}{n_3}\right) \cdot \left(\frac{n_0}{n_1} - \frac{n_2}{n_3}\right)}} \quad (8)$$

$$\operatorname{tg} k_2 d_2 = \pm \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{n_0}{n_2}\right) \cdot \left(\frac{n_0}{n_1} - \frac{n_2}{n_3}\right)}{\left(\frac{n_1}{n_2} - \frac{n_0}{n_1} \frac{n_2}{n_3}\right) \cdot \left(\frac{n_2}{n_3} - \frac{n_0}{n_3}\right)}}.$$

Die Vorzeichen der Wurzeln sind im Einklang mit den Gleichungen (7) zu wählen. Die Diskussion der Gleichungen (8) soll an Hand der Abb. 2 erfolgen. Hier sind die Brechungsindizes n_1 und n_2 als kartesische Koordinaten aufgetragen. Die Brechungsindizes n_0 und n_3 sind als fest vorgegebene Größen angenommen. Die

horizontale Gerade entspricht der Gleichung

$$\left(\frac{n_2}{n_3} - \frac{n_0}{n_2}\right) = 0,$$

die vertikale Gerade der Gleichung

$$\left(\frac{n_0}{n_1} - \frac{n_1}{n_3}\right) = 0$$

und die schräge Gerade der Gleichung

$$\left(\frac{n_1}{n_2} - \frac{n_0 n_2}{n_1 n_3}\right) = 0.$$

Die gleichen Klammerausdrücke bilden auch Teilfaktoren der Radikanden in den Gleichungen (8). In den von den drei Geraden begrenzten schraffierten Gebieten ist das Vorzeichen der beiden Radikanden (8) positiv und damit die Aufgabe lösbar. Die schräge Gerade stellt

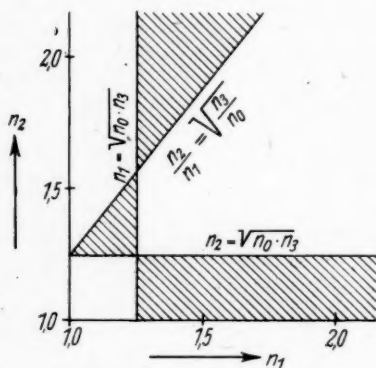


Abb. 2. Bereiche, in denen die Aufgabe der Entspiegelung lösbar ist

für eine Anzahl herausgegriffener Wellenlängen die optischen Widerstände stufenweise rückwärts numerisch berechnen und zuletzt mit Hilfe von Gleichung (5) den Übergang zum Reflexionsvermögen vollziehen. Allgemein ist zu erwarten, daß die Anwendung der Vierpoltheorie auf optische Probleme ebenso wie in der Hochfrequenztechnik und Akustik neue Gesichtspunkte für die Konstruktion von Wellenfiltern liefern wird.

Jena, Carl Zeiss-Werke.

(Bei der Redaktion eingegangen am 28. Dezember 1948.)

den von Mooney und Hiesinger behandelten Spezialfall dar. Die vorliegende Rechnung zeigt, daß zur Erreichung vollkommener Entspiegelung die Wertepaare n_1 , n_2 nicht auf der schrägen Geraden zu liegen brauchen, sondern irgendwo in den schraffierten Gebieten liegen können. Nur sind dann die zugehörigen Schichtdicken nicht mehr gleich einer Viertelwellenlänge, sondern entsprechend den Gleichungen (8) zu wählen.

Bei der Lösung komplizierterer Aufgaben (Reflexionsverstärkung von Metallsiegeln durch mehrere Schichten, Interferenzfilter) wird man die numerische Berechnung vorziehen. Man kann dann nach dem Schema der Gleichungen (6)

Berichtigung zur Arbeit von K.H. Hellwege:
Elektronenterme und Strahlung von Atomen in Kristallen
I. Termaufspaltung und elektrische Dipolstrahlung
Ann. Physik (6) 4, 95 (1948)

In die genannte Arbeit haben sich leider einige Schreibfehler eingeschlichen, die wie folgt zu korrigieren sind.

In Tabelle 2 muß es S. 110/111 und S. 113/114 für die Symmetrieklassen D_{2d} und D_{3h} richtig so heißen:

1 Sym- me- trie- klasse	2 nachd. Grup- penth.	3 Termfamilien nach Kristallquantenzahlen	4 Anzahl der Terme in jeder Familie bei gegebenem J	5 Voll- ständ. Aufsp. in
D_{2d}	$1\Gamma_1$	$S = 1, \mu_I = 0$	$\frac{1}{4} \left(1 + (-1)^{\sum i_k} \right) \left(1 + 2 \left[\frac{J}{4} \right] \right)$ $+ \frac{1}{4} \left(1 - (-1)^{\sum i_k} \right) \left(1 + \left[\frac{J+2}{4} \right] + \left[\frac{J-2}{4} \right] \right)$ $+ \frac{1}{4} \left(1 + (-1)^{\sum i_k} \right) (-1)^{\sum (i_k - j_k)}$	
	$1\Gamma_2$	$-1, \quad 0$	$\frac{1}{4} \left(1 + (-1)^{\sum i_k} \right) \left(1 + 2 \left[\frac{J}{4} \right] \right)$ $+ \frac{1}{4} \left(1 - (-1)^{\sum i_k} \right) \left(1 + \left[\frac{J+2}{4} \right] + \left[\frac{J-2}{4} \right] \right)$ $- \frac{1}{4} \left(1 + (-1)^{\sum i_k} \right) (-1)^{\sum (i_k - j_k)}$	
	$1\Gamma_3$	$1, \quad 2$	$\frac{1}{4} \left(1 + (-1)^{\sum i_k} \right) \left(1 + \left[\frac{J+2}{4} \right] + \left[\frac{J-2}{4} \right] \right)$ $+ \frac{1}{4} \left(1 - (-1)^{\sum i_k} \right) \left(1 + 2 \left[\frac{J}{4} \right] \right)$ $+ \frac{1}{4} \left(1 - (-1)^{\sum i_k} \right) (-1)^{\sum (i_k - j_k)}$	
	$1\Gamma_4$	$-1, \quad 2$	$\frac{1}{4} \left(1 + (-1)^{\sum i_k} \right) \left(1 + \left[\frac{J+2}{4} \right] + \left[\frac{J-2}{4} \right] \right)$ $+ \frac{1}{4} \left(1 - (-1)^{\sum i_k} \right) \left(1 + 2 \left[\frac{J}{4} \right] \right)$ $- \frac{1}{4} \left(1 - (-1)^{\sum i_k} \right) (-1)^{\sum (i_k - j_k)}$	
	$2\Gamma_6$	± 1	$1 + \left[\frac{J+1}{4} \right] + \left[\frac{J-1}{4} \right]$	S_4

1 Sym- me- trie- Grup- pen- klasse	2 nachd. Grup- pen- th.	3 Termfamilien nach Kristallquantenzahlen	4 Anzahl der Terme in jeder Familie bei gegebenem J	5 Voll- ständ. Aufsp. in
D_{3h}	1I_1	$S = 1, \mu_I = 0$	$\frac{1}{4} \left(1 + (-1)^{\sum i_k} \right) \left(1 + 2 \left[\frac{J}{6} \right] \right)$ $+ \frac{1}{4} \left(1 - (-1)^{\sum i_k} \right) \left(1 + \left[\frac{J+3}{6} \right] + \left[\frac{J-3}{6} \right] \right)$ $+ \frac{1}{4} \left(1 + (-1)^{\sum i_k} \right) (-1)^{\sum (i_k - j_k)}$	
	1I_2	$-1, 0$	$\frac{1}{4} \left(1 + (-1)^{\sum i_k} \right) \left(1 + 2 \left[\frac{J}{6} \right] \right)$ $+ \frac{1}{4} \left(1 - (-1)^{\sum i_k} \right) \left(1 + \left[\frac{J+3}{6} \right] + \left[\frac{J-3}{6} \right] \right)$ $- \frac{1}{4} \left(1 + (-1)^{\sum i_k} \right) (-1)^{\sum (i_k - j_k)}$	
	1I_3	$1, 3$	$\frac{1}{4} \left(1 + (-1)^{\sum i_k} \right) \left(1 + \left[\frac{J+3}{6} \right] + \left[\frac{J-3}{6} \right] \right)$ $+ \frac{1}{4} \left(1 - (-1)^{\sum i_k} \right) \left(1 + 2 \left[\frac{J}{6} \right] \right)$ $+ \frac{1}{4} \left(1 - (-1)^{\sum i_k} \right) (-1)^{\sum (i_k - j_k)}$	
	1I_4	$-1, 3$	$\frac{1}{4} \left(1 + (-1)^{\sum i_k} \right) \left(1 + \left[\frac{J+3}{6} \right] + \left[\frac{J-3}{6} \right] \right)$ $+ \frac{1}{4} \left(1 - (-1)^{\sum i_k} \right) \left(1 + 2 \left[\frac{J}{6} \right] \right)$ $- \frac{1}{4} \left(1 - (-1)^{\sum i_k} \right) (-1)^{\sum (i_k - j_k)}$	
	2I_6	± 1	$\frac{1}{2} \left(1 + (-1)^{\sum i_k} \right) \left(1 + \left[\frac{J+1}{6} \right] + \left[\frac{J-1}{6} \right] \right)$ $+ \frac{1}{2} \left(1 - (-1)^{\sum i_k} \right) \left(1 + \left[\frac{J+2}{6} \right] + \left[\frac{J-2}{6} \right] \right)$	
	2I_5	± 2	$\frac{1}{2} \left(1 + (-1)^{\sum i_k} \right) \left(1 + \left[\frac{J+2}{6} \right] + \left[\frac{J-2}{6} \right] \right)$ $+ \frac{1}{2} \left(1 - (-1)^{\sum i_k} \right) \left(1 + \left[\frac{J+1}{6} \right] + \left[\frac{J-1}{6} \right] \right)$	C_{3h}

Ferner heißt auf S. 113 die letzte Zeile von D_6 richtig:

$$\left| {}^2I_5 \right| \quad \pm 2 \quad \left| 1 + \left[\frac{J+2}{6} \right] + \left[\frac{J-2}{6} \right] \right| \quad C_6$$

Auf S. 99 ist hinter Gl. (14) der Satz „wobei m eine beliebige ganze Zahl ist“ zu streichen.

Auf S. 104 in der Zeile vor Gl. (43): $\mu = 3/2$ statt $\mu = 1/2$ und in der Zeile nach Gl. (43): Z' statt Z_1 .

Auf S. 105 letzte Zeile: Z' statt Z_1 .

Göttingen, II. Physikalisches Institut.

(Bei der Redaktion eingegangen am 20. Januar 1949.)

Verantwortlich

für die Schriftleitung: Prof. Dr. Friedrich Möglicher, Berlin-Buch, Lindenberger Weg 14
für den Verlag: Hofrat Dr. Arthur Meiner, Leipzig C 1, Salomonstraße 18 B
für den Anzeigenteil: Kurt Klimmer (Arbeitsgemeinschaft medizinischer
Verlage G. m. b. H.), Berlin C 2, Neue Grünstraße 18, Fernruf: 42 30 97
(1) Paul Dünhaupt, Köthen L 22

Lizenz-Nr. 410 / G. N. 446